L2 - ALGÈBRE BILINÉAIRE

Questions de cours pour l'examen

1. Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme bilinéaire symétrique positive (suggestion : la preuve utilisant le discriminant d'un polynôme de degré deux est probablement la plus pratique).

2. Définir une famille orthonormée dans un espace euclidien et montrer qu'une famille orthonormée est libre, et que c'est une base lorsqu'elle est de cardinal la dimension de l'espace vectoriel.

3. Définir une base orthonormée dans un espace euclidien et calculer les coordonnés d'un vecteur dans cette base. Exprimer la norme en fonction des coordonnées.

4. Définir l'orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Montrer que $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ (en admettant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). En déduire que $(F^\perp)^\perp = F$.

5. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme et propriétés de l'adjonction.

6. Définition d'un endomorphisme symétrique (ou autoadjoint). Énoncé du théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques (sans preuve).

7. Définition d'un endomorphisme orthogonal. Caractérisation des endomorphismes orthogonaux.

8. Énoncé du théorème de réduction des matrices orthogonales (sans démonstration).

9. Définitions d'une projection orthogonale et d'une symétrie orthogonale. Montrer que ce sont des endomorphismes symétriques.

10. Détermination des matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$.

11. Formule de polarisation des formes quadratiques.

12. Formule de changement de bases pour les matrices des formes bilinéaires symétriques. Définition d'une base b-orthogonale. Caractérisation des bases b-orthogonales en terme de la matrice de la forme bilinéaire.

13. Définition de la signature d'une forme quadratique.

14. Énoncé de la loi d'inertie de Sylvester.