ALGÈBRE BILINÉAIRE

DEVOIR LIBRE — L2

Exercice 1. On considère l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{3} x_j y_j.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Le but de cet exercice est de retrouver la formule de Rodrigues. Soit $\omega \in \mathbf{R}^3$ un vecteur unitaire

$$\|\omega\| = 1$$

et $\theta \in [-\pi, \pi]$. On considère $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\omega)$ et d'angle θ. Soit $x \in \mathbf{R}^3$.

1. Supposons que $x \in \mathrm{Vect}(\omega)$ soit un vecteur de l'axe de rotation. Que vaut $r(x)$?
2. Soit p la projection orthogonale sur le plan $\mathrm{Vect}(\omega)^\perp$. Donner une expression de $p(x)$ puis donner la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ de cette projection dans la base canonique.
3. Calculer $\omega \wedge p(x)$.
4. Montrer que $r(x) = r(p(x)) + x - p(x)$.
5. On suppose que $x \notin \mathrm{Vect}(\omega)$. On considère
$$f_1 = \omega, \quad f_2 = \frac{1}{\|p(x)\|} p(x), \quad f_3 = f_1 \wedge f_2.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base orthonormée.
   (b) Montrer que $\mathcal{C}$ a même orientation que $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer $\langle p(x), f_2\rangle$ puis $\langle p(x), f_3\rangle$. Décomposer $p(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.
6. Écrire la matrice de la rotation r dans la base $\mathcal{C}$.
7. Retrouver la formule de Rodrigues lorsque $x \notin \mathrm{Vect}(\omega)$
$$r(x) = x + (\cos\theta - 1)\, p(x) + \sin\theta\, \omega \wedge x.$$
8. Écrire la matrice M de l'endomorphisme $x \mapsto \omega \wedge x$ dans la base canonique.
9. Conclure.

Exercice 2. Soit $\omega = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice M est orthogonale.
2. Calculer $M\omega$.
3. En déduire le déterminant de M.
4. Déterminer les éléments caractéristiques de M.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel et soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une forme linéaire, on note alors

$$\begin{aligned} b : E \times E &\to \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x)\varphi(y) \end{aligned}$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire positive.
2. Déterminer le cône isotrope de b.
3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $a_j = \varphi(e_j) \in \mathbf{R}$.
   (a) Écrire la matrice B de b dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer le rang de B ainsi que son noyau.
   (c) Quel est le rang de b ?
   (d) Déterminer le noyau de b.
4. Faire une réduction de Gauss de la forme quadratique associée à b (ne pas se lancer dans les calculs bille en tête !). Quelle est la signature ?

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $E = \mathrm{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices réelles 2×2. On note

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la base canonique. On considère l'application

$$\begin{aligned} b : E \times E &\to \mathbf{R} \\ (A, B) &\mapsto \frac{1}{2}\big((\mathrm{Tr}A)\,(\mathrm{Tr}B) - \mathrm{Tr}(AB)\big) \end{aligned}$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.
2. Écrire la matrice B de b dans la base canonique (E_1, E_2, E_3, E_4).
3. La forme b est-elle non dégénérée ?
4. Justifier la formule
   $$A^2 - (\mathrm{TrA})A + (\det A)\mathrm{I}_2 = 0.$$
   En déduire la forme quadratique q associée à b.
5. Déterminer le cône isotrope de q.
6. Déterminer le rang et la signature de q.
7. Donner une base b-orthogonale.
8. Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle. Déterminer $F^{\perp_b}$. A-t-on $E = F \oplus F^{\perp_b}$?