ALGÈBRE BILINÉAIRE

CORRECTION DU DEVOIR LIBRE — L2

Exercice 1. On considère l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{3} x_j y_j.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Le but de cet exercice est de retrouver la formule de Rodrigues. Soit $\omega \in \mathbf{R}^3$ un vecteur unitaire

$$\|\omega\| = 1$$

et $\theta \in [-\pi, \pi]$. On considère $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\omega)$ et d'angle θ. Soit $x \in \mathbf{R}^3$.

1. Supposons que $x \in \mathrm{Vect}(\omega)$ soit un vecteur de l'axe de rotation. Que vaut $r(x)$?

   L'axe d'une rotation correspond à l'espace propre $\ker(r - \mathrm{Id}_E)$, ainsi $r(x) = x$.

2. Soit p la projection orthogonale sur le plan $\mathrm{Vect}(\omega)^\perp$. Donner une expression de $p(x)$ puis donner la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ de cette projection dans la base canonique.

   Il suffit de décomposer le vecteur selon

   $$x = \underbrace{\langle x, \omega\rangle\omega}_{\in \mathrm{Vect}(\omega)} + \underbrace{x - \langle x, \omega\rangle\omega}_{\in \mathrm{Vect}(\omega)^\perp}$$

   pour obtenir

   $$p(x) = x - \langle x, \omega\rangle\omega.$$

   La matrice P de p dans la base canonique est donc

   $$P = \begin{pmatrix} 1-\omega_1^2 & -\omega_1\omega_2 & -\omega_1\omega_3 \\ -\omega_1\omega_2 & 1-\omega_2^2 & -\omega_2\omega_3 \\ -\omega_1\omega_3 & -\omega_2\omega_3 & 1-\omega_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2^2+\omega_3^2 & -\omega_1\omega_2 & -\omega_1\omega_3 \\ -\omega_1\omega_2 & \omega_1^2+\omega_3^2 & -\omega_2\omega_3 \\ -\omega_1\omega_3 & -\omega_2\omega_3 & \omega_1^2+\omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer $\omega \wedge p(x)$.

   On a par bilinéarité du produit vectoriel

   $$\omega \wedge p(x) = x \wedge \omega - \underbrace{\langle x, \omega\rangle\, \omega \wedge \omega}_{=0} = x \wedge \omega.$$

4. Montrer que $r(x) = r(p(x)) + x - p(x)$.

   Par linéarité de r et avec la question 1 puisque $x - p(x) \in \mathrm{Vect}(\omega)$, on a
   $$r(x) = r(p(x)) + r(x - p(x)) = r(p(x)) + x - p(x).$$

5. On suppose que $x \notin \mathrm{Vect}(\omega)$. On considère
   $$f_1 = \omega, \quad f_2 = \frac{1}{\|p(x)\|}p(x), \quad f_3 = f_1 \wedge f_2.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base orthonormée.

   Les vecteurs f_1 et f_2 forment déjà une famille orthonormée (notons que comme $x \notin \mathrm{Vect}(\omega)$, on a $p(x) \neq 0$). Par définition du produit vectoriel f_3 est orthogonal à f_2 et f_3 puisque
   $$\langle f_1, f_3\rangle = \det(f_1, f_2, f_1) = 0, \quad \langle f_2, f_3\rangle = \det(f_1, f_2, f_2) = 0$$
   et en outre
   $$\begin{aligned}\|f_3\|^2 &= \langle f_3, f_3\rangle = \det(f_1, f_2, f_1 \wedge f_2) = \det(f_1 \wedge f_2, f_1, f_2)\\ &= \langle (f_1 \wedge f_2) \wedge f_1, f_2\rangle = \|f_1\|\,\|f_2\| = 1.\end{aligned}$$

   (b) Montrer que $\mathcal{C}$ a même orientation que $\mathcal{B}$.

   Par définition du produit vectoriel
   $$\det(f_1, f_2, f_3) = \langle f_1 \wedge f_2, f_3\rangle = \|f_3\|^2 = 1 > 0$$
   donc la base (f_1, f_2, f_3) a même orientation que $\mathcal{B}$.

   (c) Calculer $\langle p(x), f_2\rangle$ puis $\langle p(x), f_3\rangle$. Décomposer $p(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.

   On a
   $$\begin{aligned}\langle p(x), f_2\rangle &= \|p(x)\|\|f_2\|^2 = \|p(x)\|\\ \langle p(x), f_3\rangle &= p(x)\langle f_2, f_3\rangle = 0\end{aligned}$$
   et par conséquent dans la base $\mathcal{C}$
   $$\begin{aligned}p(x) &= \underbrace{\langle p(x), f_1\rangle}_{=0} f_1 + \langle p(x), f_2\rangle f_2 + \langle p(x), f_3\rangle f_3\\ &= \|p(x)\| f_3.\end{aligned}$$

6. Écrire la matrice de la rotation r dans la base $\mathcal{C}$.

   Étant donnné que $f_1 = \omega$ est vecteur propre pour la valeur propre 1, la matrice de r dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme
   $$R = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2$ et $U \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ et comme R est une matrice orthogonale

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & {}^{\mathrm{t}}U^{-1}\alpha \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ {}^{\mathrm{t}}\alpha & {}^{\mathrm{t}}U \end{pmatrix}$$

on en tire

$$\alpha = (0,0), \quad U \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R}).$$

Comme $\det R = 1 = \det U$, on a $U \in \mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ et ainsi

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Puisque $2\cos\varphi = \operatorname{Tr} U = \operatorname{Tr} R - 1 = 2\cos\theta$ et

$$\det(f_2, Rf_2, f_1) = \sin\theta = \sin\varphi$$

on en tire $\varphi = \theta \mod 2\pi$ et finalement

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

7. Retrouver la formule de Rodrigues lorsque $x \notin \mathrm{Vect}(\omega)$

$$r(x) = x + (\cos\theta - 1)\, p(x) + \sin\theta\, \omega \wedge x.$$

On a

$$\begin{aligned} r(x) &= r(p(x)) + x - p(x) = \|p(x)\| r(f_2) + x - p(x) \\ &= \|p(x)\| \big(\cos\theta\, f_2 + \sin\theta\, f_3\big) + x - p(x) \\ &= \cos\theta\, p(x) + \sin\theta \omega \wedge p(x) + x - p(x) \\ &= \cos\theta\, p(x) + \sin\theta\, \omega \wedge x + x - p(x) \\ &= x + (\cos\theta - 1)\, p(x) + \sin\theta\, \omega \wedge x. \end{aligned}$$

8. Écrire la matrice M de l'endomorphisme $x \mapsto \omega \wedge x$ dans la base canonique.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Conclure.

La matrice de la rotation r dans la base canonique est donnée par

$$\cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2\omega_3 \\ \omega_1\omega_3 & \omega_2\omega_3 & \omega_3^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne la formule de Rodrigues.

Exercice 2. Soit $\omega = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2=1$, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice M est orthogonale.

$$^{\mathrm{t}}MM = \begin{pmatrix} a^2 & ab+c & ac-b \\ ab-c & b^2 & bc+a \\ ac+b & bc-a & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer $M\omega$.

   On a
$$M\omega = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

3. En déduire le déterminant de M.

   Comme M est une matrice orthogonale, son déterminant vaut 1 ou -1. Or 1 est valeur propre d'après la question précédente et de plus si l'on note $\mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}$ les deux autres valeurs propres, on a
$$\mathrm{Tr}M = 1 = 1 + \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 1 + 2\cos\theta$$
   donc $\cos\theta = 0$ et i et $-i$ sont les deux autres valeurs propres On en tire
$$\det M = 1 \times i \times (-i) = 1.$$
   Finalement M est la matrice d'une rotation.

4. Déterminer les éléments caractéristiques de M.

   D'après la question précédente, la matrice M est la matrice de rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\omega)$ et d'angle $\pi/2$ ou $-\pi/2$. Comme on a
$$\det(e_1, Ae_1, \omega) = \det \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ 0 & ab+c & b \\ 0 & ac-b & c \end{pmatrix} = b^2 + c^2 > 0$$
   si $(b,c) \neq (0,0)$ et
$$\det(e_2, Ae_2, \omega) = \det \begin{pmatrix} 0 & ab-c & a \\ 1 & b^2 & b \\ 0 & bc+a & c \end{pmatrix} = a^2 + c^2 > 0$$
   si $(a,c) \neq (0,0)$, l'angle est $\pi/2$. La matrice M est donc la matrice de rotation d'axe porté par ω et d'angle $\pi/2$. Notons que l'on retrouve ce résultat en utilisant la formule de Rodrigues (exercice 1).

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel et soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une forme linéaire, on note alors

$$\begin{aligned} b : E \times E &\to \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x)\varphi(y) \end{aligned}$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire positive.

   L'application b est clairement linéaire à gauche et symétrique donc bilinéaire.

2. Déterminer le cône isotrope de b.

$$C(b) = \left\{x \in E : b(x, x) = \varphi(x)^2 = 0\right\} = \ker \varphi$$

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $a_j = \varphi(e_j) \in \mathbf{R}$.

   (a) Écrire la matrice B de b dans la base $\mathcal{B}$.

$$B = (a_j a_k)_{1 \leq j,k \leq n} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

   (b) Déterminer le rang de B ainsi que son noyau.

   Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \ker B$ alors

$$(Bx)_j = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right) a_j = 0.$$

   Deux cas se présentent : soit $a = (a_1, \dots, a_n) = 0$, ce qui signifie que $\varphi = 0$ est la forme nulle, dans ce cas le rang de B est nul et le noyau de B est $|R^n$, soit $a \neq 0$, ce qui signifie que la forme linéaire φ est non nulle est dans ce cas

$$\ker B = (\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$$

   et le rang de B est 1.

   (c) Quel est le rang de b ?

   Le rang de b est 1 si φ est non nulle et 0 si φ est nulle.

   (d) Déterminer le noyau de b.

$$\ker b = \ker \varphi$$

4. Faire une réduction de Gauss de la forme quadratique associée à b (ne pas se lancer dans les calculs bille en tête !). Quelle est la signature ?

Si φ est nulle alors la signature est $(0,0)$ et si la forme φ est non nulle, alors il existe j_0 tel que $a_{j_0} \neq 0$ et on pose

$$y_{j_0} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \quad y_j = x_j,\, j \neq j_0$$

de sorte que la matrice de passage est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{j_0} & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $a_{j_0} \neq 0$ et la forme quadratique est donnée par

$$q(x) = b(x,x) = y_{j_0}^2$$

et la signature est $(1,0)$.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $E = \mathrm{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices réelles 2×2. On note

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la base canonique. On considère l'application

$$\begin{aligned} b : E \times E &\to \mathbf{R} \\ (A,B) &\mapsto \frac{1}{2}\big((\mathrm{Tr}A)\,(\mathrm{Tr}B) - \mathrm{Tr}(AB)\big) \end{aligned}$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.

   L'application b est clairement linéaire à gauche et symétrique car

   $$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

   donc bilinéaire.

2. Écrire la matrice B de b dans la base canonique (E_1, E_2, E_3, E_4).

   $$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La forme b est-elle non dégénérée ?

   Oui elle est non dégénérée car

   $$\mathrm{rang}(b) = \mathrm{rang}(B) = 4.$$

4. Justifier la formule
$$A^2 - (\mathrm{TrA})A + (\det A)\mathrm{I}_2 = 0.$$
En déduire la forme quadratique q associée à b.

La formule est une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton puisque $\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det A$ est le polynôme caractéristique de A. On en déduit en prenant la trace
$$\mathrm{Tr}(A^2) - (\mathrm{Tr}A)^2 + 2\det A = 0$$
et par conséquent
$$q(A) = b(A, A) = \det A.$$
En coordonnées
$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1E_2 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$$
la forme quadratique prend la forme
$$q(A) = x_1x_4 - x_2x_3.$$

5. Déterminer le cône isotrope de q.

$$\begin{aligned} C(q) &= \big\{A \in E : \det A = 0\big\} = E \setminus \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \\ &= \left\{A = \sum_{j=1}^{4} x_jE_j : x_1x_4 - x_2x_3\right\} \end{aligned}$$

6. Déterminer le rang et la signature de q.

Le rang est 4 et par réduction de Gauss
$$q(A) = x_1x_4 - x_2x + 3 = \frac{1}{4}\big((x_1 + x_4)^2 - (x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2\big)$$
la signature est $(2, 2)$.

7. Donner une base b-orthogonale.

Le changement de variable
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
donne
$$B = \frac{1}{4}\,{}^{\mathrm{t}}P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P.$$

Une base b-orthogonale est donc donnée par les colonnes de

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle. Déterminer $F^{\perp_b}$. A-t-on $E = F \oplus F^{\perp_b}$?

Le sous-espace

$$F = \{A \in E : \mathrm{Tr}(A) = 0\} = \left\{A = \sum_{j=1}^{4} x_j E_j : x_1 + x_4 = 0\right\}$$

est de dimension 3 et est engendré par les vecteurs

$$E_1 - E_4,\ E_2,\ E_3.$$

Si $B = \sum_{j=1}^{4} y_j E_j \in F^{\perp_b}$ alors

$$0 = b(B, E_2) = \sum_{j=1}^{4} y_j b(E_j, E_2) = -\frac{1}{2} y_3$$

$$0 = b(B, E_3) = \sum_{j=1}^{4} y_j b(E_j, E_3) = -\frac{1}{2} y_2$$

$$0 = b(B, E_1 - E_4) = \sum_{j=1}^{4} y_j b(E_j, E_1) - \sum_{j=1}^{4} y_j b(E_j, E_4) = \frac{1}{2}(y_1 - y_4)$$

et donc

$$B = y_1 E_1 + y_1 E_4.$$

On conclut

$$F^{\perp_b} = \mathrm{Vect}(E_1 + E_4).$$

On vérifie que

$$E = F \oplus F^{\perp_b}$$

car b est non dégénérée.