
Cours d'analyse 4

année 2024-2025, Nancy

Notes rédigées par Anne de Roton

Table des matières

1	Espaces vectoriels normés	9
1.1	Norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel	9
1.1.1	Définition	9
1.1.2	Exemples	10
1.1.3	Boules associées à une norme	13
1.1.4	Normes équivalentes	14
1.2	Topologie des espaces vectoriels normés	15
1.3	Suites et limites	17
2	Applications continues	19
2.1	Continuité, limite	19
2.1.1	Limite	19
2.1.2	Continuité	21
2.1.3	Lien entre topologie et continuité	22
2.1.4	Exemples de fonctions continues	23
2.2	Applications linéaires continues	23
2.3	Applications multilinéaires continues	26
3	Compacité (principalement en dimension finie)	29
3.1	Définition, premières propriétés	29
3.2	Continuité et compacité	30
3.3	Équivalence des normes en dimension finie. Compact=fermé, borné.	31
4	Différentiabilité	35
4.1	Différentiabilité	35
4.1.1	Définitions, premiers exemples	35
4.1.2	Opérations sur les différentielles	36
4.1.3	Dérivée directionnelle	38
4.2	Applications définies sur \mathbb{R}^n	40
4.2.1	Dérivées partielles	40
4.2.2	Matrice jacobienne	42
4.2.3	Accroissements finis	44
4.3	Dérivées d'ordre 2	45
4.3.1	Cas général, dérivées partielles secondes	45
4.3.2	Matrice Hessienne	46
4.3.3	Formule de Taylor à l'ordre 2	47

5	Extrema	49
5.1	Extrema locaux et globaux	49
5.2	Points critiques : conditions d'ordre 1	50
5.3	Conditions d'ordre 2	51
5.3.1	Matrice Hessienne positive, définie positive	51
5.3.2	Condition nécessaire	52
5.3.3	Condition suffisante	52
5.3.4	Cas particulier : la dimension 2	54
5.4	Exemple d'étude pratique	54
5.5	Le cas des fonctions convexes	55
5.5.1	Définitions, rappels	55
5.5.2	Extrema des fonctions convexes	57
6	Intégrales multiples	59
6.1	Notion de C^1 difféomorphisme	59
6.2	Intégrales multiples : définitions	60
6.2.1	Intégrale sur un pavé de \mathbb{R}^n	60
6.2.2	Intégrale double sur un ensemble délimité par des graphes de fonctions	61
6.2.3	Intégrale triple sur un ensemble délimité par des graphes de fonctions	63
6.2.4	Propriétés des intégrales multiples	63
6.3	Changement de variables	64
6.3.1	Théorème de changement de variable	64
6.3.2	Exemples	64

Avertissement, remerciements

Ces notes de cours ne sont pas dans leur version définitive. Le cours est en perpétuelle construction et ces notes sont celles que j'utilise en cours. Elles sont incomplètes, souvent les démonstrations ne sont pas incluses. En tout état de cause, **ces notes ne sauraient se substituer aux cours d'amphi**. Je ne les mets en ligne qu'à la demande d'étudiantes et d'étudiants qui souhaitent travailler le cours en amont pour mieux profiter des cours d'amphi et pour permettre aux personnes absentes de rattraper les cours manqués. L'usage de ces notes est donc interne au L2 maths de cette année et est un complément aux cours.

Je souhaite remercier ici Antoine Lemenant, chargé du cours d'analyse 3 jusqu'en 2021-2022 pour ses notes de cours que j'ai abondamment pillées.

J'ai aussi utilisé diverses sources sur internet, que je vous conseille si vous souhaitez diversifier les approches pédagogiques ou trouver des exercices complémentaires :

- [exo7](http://exo7.emath.fr/) <http://exo7.emath.fr/> qui propose des cours en format pdf, des cours filmés, des exercices corrigés pour toute la licence ;
- [bibmath](http://www.bibmath.net/) <http://www.bibmath.net/> qui propose des exercices corrigés pour toute la licence et plein d'autres choses ;

Enfin, j'ai emprunté une partie des exemples et exercices au livre *Fonctions de plusieurs variables* de Hirsch et Eguether.

Si vous souhaitez passer un concours de l'enseignement, je vous conseille de commencer dès maintenant à travailler avec des livres. Ils seront votre source principale l'année du concours et il est bon d'avoir déjà en tête des ouvrages qui vous conviennent.

Programme

Espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Normes. Vocabulaire de la topologie générale : ouverts et fermés. Convergence de suites vectorielles. Compacité. Équivalence entre compact et "fermé borné". Équivalence des normes. Continuité d'une application entre espaces vectoriels normés de dimension finie. Norme d'une application linéaire. Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires.

Fonctions de plusieurs variables. Limite ponctuelle d'une fonction de plusieurs variables. Continuité d'une fonction de plusieurs variables. Caractérisation de la continuité des fonctions vectorielles par la continuité des fonctions coordonnées.

La différence avec la fin du chapitre précédent est l'utilisation de coordonnées.

Calcul différentiel. Différentiabilité pour les applications entre espaces vectoriels normés de dimension finie. Différentielle et dérivées partielles. Dérivée directionnelle. Matrice jacobienne. Applications de classe C^1 . Caractérisation par la continuité des dérivées partielles. Propriétés de la différentielle : linéarité, différentielle d'une composée. Différentielle des applications linéaires et bilinéaires. Difféomorphisme.

Cas particulier des fonctions à valeurs réelles. Dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz. Matrice Hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Points critiques. Extrema locaux. Caractérisation des extrema locaux et de la convexité à l'aide de la matrice Hessienne.

Le théorème de Schwarz est admis.

Intégrales multiples. Définition de l'intégrale sur un pavé comme intégrale itérée. Théorème de Fubini pour les intégrales multiples. Changement de variables (calculs). Exemple de coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

Le théorème de Fubini est admis et sera démontré dans le cadre de la théorie de l'intégration de Lebesgue dans le cours "intégration et probabilités".

Intégrales curvilignes. Rappels sur les courbes paramétrées planes. Changement de paramétrages. Intégrale curviligne. Invariance par changement de paramétrage. Longueur d'une courbe paramétrée régulière. Invariance par changement de paramétrage. Paramétrage par longueur d'arc. Formule de Green-Riemann. Courbure d'une courbe birégulière.

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

But : généraliser la notion de limite au cas d'une fonction d'un espace vectoriel dans un autre. Besoin de notion de proximité.

Dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , x est proche de y lorsque $|x - y|$ est petit (valeur absolue ou module). Dans un espace vectoriel quelconque, on dira que le vecteur x est proche de y lorsque $x - y$ sera petit, ce qu'il faut définir. On introduit donc la notion de norme, qui mesurera la taille d'un vecteur.

Exemple 1 Dans \mathbb{R}^2 ,

- norme euclidienne $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$
- norme ℓ^1 ou de Manhattan $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

Dans tout ce chapitre, E sera un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Les éléments de E seront appelés des vecteurs. On peut additionner des vecteurs, les multiplier par un scalaire. On travaillera beaucoup avec $E = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$.

1.1 Norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel

1.1.1 Définition

Définition 1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une **norme** sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$ (positivité);
2. pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation);
3. pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité);
4. pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

E muni d'une norme N est appelé espace vectoriel normé et noté (E, N) . Dans ce cours, on écrira evn pour "espace vectoriel normé".

On a en fait une cinquième propriété : N est une application de E dans \mathbb{R} bien définie.

Remarque 1 Si N est une norme sur l'espace vectoriel E , alors

- $\forall x \in E$, $N(-x) = N(x)$;
- $\forall x, y \in E$, $N(x - y) \leq N(x) + N(y)$;
- $\forall x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leq \begin{cases} N(x - y) \\ N(x + y) \end{cases}$.

Cette dernière propriété sera très utile dans la pratique.

1.1.2 Exemples

Normes sur \mathbb{K}^n

- $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est un evn sur \mathbb{R} .
- $E = \mathbb{C}$ muni du module est un evn sur \mathbb{C} .
- Sur $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n on définit la norme 1 par

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad \text{si } x = (x_1, \cdots, x_n).$$

$(E, \|\cdot\|_1)$ est un evn.

Démonstration

- Positivité : $\|\cdot\|_1$ est clairement une application bien définie sur \mathbb{K}^n à valeurs dans \mathbb{R}^+ .
- Séparabilité : Si $x \in \mathbb{K}^n$ et $\|x\|_1 = 0$ alors comme une somme de termes positifs ne peut être nulle que si chaque terme est nul, on a $|x_i| = 0$ donc $x_i = 0$ pour tout $i \in [1, n]$ et donc $x = 0$.
- Homogénéité : Si $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors pour tout $i \in [1, n]$, $|\lambda x_i| = |\lambda| |x_i|$ donc

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1.$$

- Inégalité triangulaire : Si $x, y \in \mathbb{K}^n$ alors pour tout $i \in [1, n]$, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ donc

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

- Sur $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n , on définit la norme infinie par

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i| \quad \text{si } x = (x_1, \cdots, x_n).$$

$(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un evn.

Démonstration

Très similaire à la précédente. À savoir faire (cf TD).

- L'application $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \min\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$, n'est pas une norme.

Démonstration

$N(1, 0, \cdots, 0) = 0$ et pourtant $(1, 0, \cdots, 0)$ n'est pas le vecteur nul, la séparabilité n'est pas vérifiée.

Normes dérivées d'un produit scalaire

Théorème 1 Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors l'application $N: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E . On l'appelle norme dérivée du produit scalaire.

Exemple 2 Dans \mathbb{R}^n , la norme $\|\cdot\|_2$ est dérivée du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Pour démontrer ce théorème on aura besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (qui est très utile en soit et doit être connue).

Lemme 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et N la norme dérivée de ce produit scalaire. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq N(x)N(y).$$

Démonstration du lemme. Très jolie démonstration ! On la fait dans le cas plus simple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soient $x, y \in E^2$. On considère l'application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\lambda \mapsto N(\lambda x + y)^2$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geq 0$ par positivité du produit scalaire. On a de plus, par symétrie et bilinéarité du produit scalaire

$$P(\lambda) = N(\lambda x + y)^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \lambda^2 N(x)^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + N(y)^2.$$

Ainsi P est une application polynomiale de degré 2 qui ne change pas de signe sur \mathbb{R} donc son discriminant $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4(N(x)N(y))^2$ est négatif ou nul, i.e. $|\langle x, y \rangle| \leq N(x)N(y)$.

Exemple 3 Dans \mathbb{R}^n , l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Démonstration du théorème dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est un peu plus technique, il faut prendre garde aux conjugués)

- N est clairement une application bien définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}^+ . La positivité est vérifiée car induite par la positivité du produit scalaire.
- Si $x \in E$ et $N(x) = 0$ alors, le produit scalaire étant défini positif, $x = 0$. La séparabilité est vérifiée.
- Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$N(\lambda x)^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 N(x)^2$$

et l'homogénéité est vérifiée en prenant la racine carrée car $N(x) \geq 0$.

- Si $x, y \in E$ alors par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$N(x + y)^2 = \langle x + y, x + y \rangle = N(x)^2 + 2\langle x, y \rangle + N(y)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $2\langle x, y \rangle \leq 2N(x)N(y)$ et donc

$$N(x + y)^2 \leq N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2 = (N(x) + N(y))^2.$$

Un passage à la racine carrée permet de montrer que l'inégalité triangulaire est vérifiée (tous les termes sont positifs).

Exemple 4 • \mathbb{R}^n muni de la norme 2 ou norme euclidienne définie par $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ est un evn.

• \mathbb{C}^n muni de la norme 2 ou norme euclidienne définie par $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ est un evn.

Normes sur un espace vectoriel de dimension finie

On verra en TD que si $p \in [1, +\infty[$ et si $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

alors $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est un evn.

Sur un espace vectoriel E de dimension finie n , on peut en choisissant une base (e_1, \dots, e_n) , identifier E à \mathbb{K}^n . On définit alors une norme N_p sur E par

$$N_p(x) = \|(x_1, \dots, x_n)\|_p \quad \text{avec} \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Exemple 5 • On peut identifier $M_n(\mathbb{R})$ à \mathbb{R}^{n^2} et on obtient que l'application

$$M = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \mapsto \max\{|a_{i,j}|, (i,j) \in [1,n]^2\}$$

définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

• Si $p \geq 1$, l'application

$$M = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \mapsto \left(\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} |a_{i,j}|^p \right)^{1/p}$$

définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

Normes induites, norme produit

Proposition 1 Si F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé (E, N) , alors F muni de la norme induite N_F est un espace vectoriel normé.

Proposition 2 Si $(E_1, N_1), \dots, (E_k, N_k)$ sont des espaces vectoriels normés sur \mathbb{K} alors $E = E_1 \times \dots \times E_k$ muni de N définie par $N(x_1, \dots, x_n) = \max_{i=1}^n N_i(x_i)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration

• N est clairement une application bien définie sur E^k à valeurs dans \mathbb{R}^+ . La positivité est vérifiée.

• Si $x \in E^k$ et $N(x) = 0$ alors comme un maximum de termes positifs ne peut être nul que si chaque terme est nul, on a $N_i(x_i) = 0$ donc $x_i = 0$ pour tout $i \in [1, k]$ et donc $x = 0$. La séparabilité est vérifiée.

• Si $x \in E^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors pour tout $i \in [1, k]$, $N_i(\lambda x_i) = \lambda N_i(x_i)$ donc

$$N(\lambda x) = \max_{i=1}^k N_i(\lambda x_i) = \max_{i=1}^k |\lambda| N_i(x_i) = |\lambda| \max_{i=1}^k N_i(x_i) = |\lambda| N(x)$$

et l'homogénéité est vérifiée.

• Si $x, y \in E^k$ alors pour tout $i \in [1, k]$, $N_i(x_i + y_i) \leq N_i(x_i) + N_i(y_i)$ donc

$$N(x + y) = \max_{i=1}^k N_i(x_i + y_i) \leq \max_{i=1}^k (N_i(x_i) + N_i(y_i)) \leq \max_{i=1}^k N_i(x_i) + \max_{i=1}^k N_i(y_i) = N(x) + N(y)$$

et l'inégalité triangulaire est vérifiée.

IncurSION en dimension infinie

Soit E l'espace vectoriel des applications continues du segment $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

- $N_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt$ définit une norme sur E .

Démonstration

• N_1 est clairement une application bien définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}^+ . La positivité est vérifiée.

• Si $f \in E$ et $N_1(f) = 0$ alors comme $|f|$ est positive et continue, on a f nulle sur $[0, 1]$.

On peut le montrer en raisonnant par l'absurde et en supposant que $|f(c)| > 0$ pour un certain $c \in [0, 1]$ et par continuité il existera un intervalle non réduit à un point de $[0, 1]$ sur lequel $|f|$ sera $\geq |f(c)|/2$ ce qui impliquera la positivité stricte de $N_1(f)$.

On peut aussi appliquer le théorème fondamental du calcul intégral vu en analyse 2 : la fonction $F : x \mapsto \int_0^x |f(t)| dt$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ de dérivée $|f|$ positive et donc elle est croissante. Comme $F(0) = 0 = F(1)$, la fonction F est nulle et donc sa dérivée $|f|$ aussi. La séparabilité est vérifiée.

• L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent de la linéarité de l'intervalle et des propriétés (homogénéité et inégalité triangulaire) de la valeur absolue.

- $N_2(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ définit une norme sur E qui provient du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$.

Démonstration

On vérifie que l'on a bien un produit scalaire.

- $N_\infty(f) = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ définit une norme sur E .

Démonstration

À faire en exercice.

- Pour $p \geq 1$, $N_p(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ définit une norme sur E (admis).
- N_1 et N_2 ne sont pas des normes sur l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

Démonstration

C'est la séparabilité qui n'est pas vérifiée. L'intégrale d'une fonction nulle partout sauf en 1/2 où elle vaut 1 est nulle mais la fonction n'est pas nulle.

1.1.3 Boules associées à une norme

Définition 2 Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$ et $R \geq 0$ un réel.

On appelle boule ouverte de centre x et de rayon R l'ensemble

$$B(x, R) = \{y \in E : N(x - y) < R\}.$$

On appelle boule fermée de centre x et de rayon R l'ensemble

$$\overline{B}(x, R) = \{y \in E : N(x - y) \leq R\}.$$

Exemple 6 • $B(x, 0) = \emptyset$ et $\overline{B}(x, 0) = \{x\}$.

• Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(x, R) =]x - R, x + R[$ et $\overline{B}(x, R) = [x - R, x + R]$.

• Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $B(x, R)$ est le disque ouvert de centre x et de rayon R et $\overline{B}(x, R)$ le disque fermé.

• Dans $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$, $B(x, R)$ est la sphère ouverte de centre x et de rayon R et $\overline{B}(x, R)$ la sphère fermée... mais en général une boule n'est pas ronde !

• Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ou $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, les boules sont des carrés !

Remarque 2 $B(0, R) = RB(0, 1)$ mais $B(x, R) \neq RB(x, 1)$ si $x \neq 0$.
Plus généralement $B(x, R) = x + RB(0, 1)$.

Définition 3 Soit (E, N) un evn et A une partie de E . On dit que A est bornée si il existe une boule $B(x, R)$ qui contient A .

1.1.4 Normes équivalentes

Définition 4 Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes sur E si il existe des constantes α et β strictement positives telles que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x). \quad (1.1)$$

Proposition 3 Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E (elle est symétrique, transitive et réflexive).

Proposition 4 Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E , alors toute partie de E bornée pour N_1 est bornée pour N_2 .

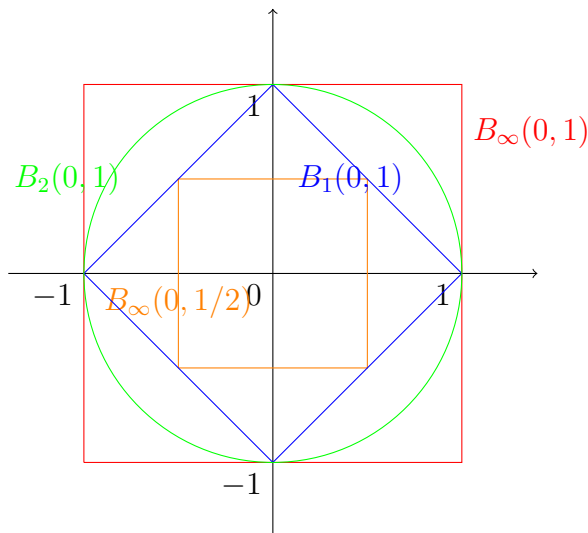
Remarque 3 La propriété (1.1) est équivalente à l'inclusion

$$B_{N_1}(0, 1/\beta) \subset B_{N_2}(0, 1) \subset B_{N_1}(0, 1/\alpha)$$

donc N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $B_{N_2}(0, 1)$ est contenu dans une boule de centre 0 pour N_1 et contient une boule de centre 0 pour N_1 .

Exemple 7 • Dans \mathbb{R}^2 les normes 1, 2 et infinie sont équivalentes et on a

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1/2) \subset B_{\|\cdot\|_1}(0, 1) \subset B_{\|\cdot\|_2}(0, 1) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1).$$



• Dans \mathbb{R}^n , les normes 1, 2 et infinie sont équivalentes et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i| = \left(\max_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2.$$

De plus $\|x\|_1^2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|)^2 \geq \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ donc

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) \leq n \|x\|_\infty.$$

On démontrera plus loin dans ce cours le théorème essentiel suivant.

Théorème 2 Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors les normes sur E sont toutes équivalentes.

Remarque 4 C'est faux en dimension infinie. Par exemple si pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie par $f_n(x) = (\frac{1}{n} - x) n^2 \mathbf{1}_{[0, 1/n]}(x)$ pour $x \in [0, 1]$, alors la partie $A = \{f_n, n \geq 1\}$ est incluse dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$.

- A est bornée pour N_1 car $N_1(f_n) = \int_0^{1/n} (\frac{1}{n} - x) n^2 dx = \frac{1}{2}$;
- A n'est pas bornée pour N_∞ car $N_\infty(f_n) = n$.

Les norme N_1 et N_∞ ne sont donc pas équivalentes.

1.2 Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 5 Soit (E, N) un espace vectoriel normé et A une partie de E . On dit que A est ouverte ou que A est un ouvert si

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A.$$

Exemple 8 \emptyset et E sont des ouverts.

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $] - \infty, 2[$ est ouvert mais $] - 1, 2[$ ne l'est pas.

Démonstration

$] - \infty, 2[$ est ouvert car si $x \in] - \infty, 2[$ alors $2 - x > 0$ et $B(x, 2 - x) \subset] - \infty, 2[$.

$] - 1, 2[$ n'est pas ouvert car pour tout $\varepsilon > 0$, $] - 1, 2[\cap B(2, \varepsilon) \not\subset] - 1, 2[$ puisque $]2, 2 + \varepsilon[\subset B(2, \varepsilon)$ et $]2, 2 + \varepsilon[\cap] - 1, 2[= \emptyset$.

Proposition 5 Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, les intervalles ouverts sont les intervalles de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.

Proposition 6 Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts.

Proposition 7 Une boule ouverte est un ouvert.

Démonstration

Cela provient de l'inclusion $B(x, R - N(a - x)) \subset B(a, R)$ si $x \in B(a, R)$.

Proposition 8

1. Une union arbitraire d'ouverts est un ouvert.
2. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration

1. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E , $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ et $x \in O$. Alors Il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O_i \subset O$. O est donc bien ouvert.
2. Soit $(O_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'ouverts de E , $O = O_1 \cap O_2 \cdots \cap O_n$ et $x \in O$. Alors pour tout $i \in [1, n]$, $x \in O_i$. Comme O_i est ouvert, il existe $\epsilon_i > 0$ tel que $B(x, \epsilon_i) \subset O_i$. Notons $\epsilon = \min_{i=1}^n \epsilon_i$. Alors $\epsilon > 0$ et pour tout $i \in [1, n]$, $B(x, \epsilon) \subset B(x, \epsilon_i) \subset O_i$ donc $B(x, \epsilon) \subset O$ et O est donc bien ouvert.

Exemple 9 Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $] - \infty, 1[\cup]2, 6[$ est ouvert.

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $B(0, 1) \cap B((1/2, 0), 1)$ est ouvert.

Attention! Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte.

Exemple 10 $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Définition 6 Soit (E, N) un evn et A une partie de E . On dit que A est fermée ou que A est un fermé si le complémentaire $E \setminus A$ de A dans E est un ouvert.

Exemple 11 \emptyset et E sont des fermés.

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $] - \infty, a[\cup]b, +\infty[$ est fermé, $[a, b]$ aussi mais $]a, b]$ ne l'est pas si $a < b$.

Attention! Certains ensembles ne sont ni ouverts, ni fermés; E et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 9 1. Une intersection arbitraire de fermés est un fermé.

2. Une réunion finie de fermés est un fermé.

Exemple 12 Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $] - \infty, 1[\cup]2, 6[$ est fermé.

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $\overline{B}(0, 1) \cap \overline{B}((1/2, 0), 1)$ est fermé.

Définition 7 Soit (E, N) un evn et A une partie de E .

1. L'adhérence de A , notée \overline{A} est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) de E contenant A . C'est l'intersection de tous les fermés de E contenant A .
2. L'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A . C'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A .
3. La frontière de A ou bord de A , notée ∂A est l'adhérence de A privée de son intérieur.

Exemple 13 1. Si $A =]a, b[\subset \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), alors $\overline{A} = [a, b]$, $\overset{\circ}{A} =]a, b[$ et $\partial A = \{a, b\}$.

2. Si F est fermé, l'adhérence de F est F .

3. Si O est ouvert, l'intérieur de O est O .

4. Si $A = \overline{B}(x, R)$, alors $\overline{A} = A$, $\overset{\circ}{A} = B(x, R)$ et $\partial A = \mathcal{C}(x, R)$.

5. Si $A = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$, alors $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ et $\partial A = \overline{A}$.

6. Si $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x > 0\}$, alors $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ et $\partial A = \overline{A}$.

Proposition 10 Soit (E, N) un evn et A une partie de E . Alors

1. $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$;
2. A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$;
3. A ouvert $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

Définition 8 Soit (E, N) un evn et A une partie de E . On dit que A est dense dans E si $E = \overline{A}$.

Exemple 14 \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} (admis).

1.3 Suites et limites

Soit (E, N) un evn.

Définition 9 Soit $(u_n)_n$ une suite de E et $\ell \in E$. On dit que $(u_n)_n$ converge vers ℓ pour la norme N et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(u_n - \ell) = 0$, i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, N(u_n - \ell) < \varepsilon \text{ i.e. } u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

Exemple 15 Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $(0, 0)$.

Proposition 11 Toute suite convergente est bornée.

Proposition 12 Soient N_1 et N_2 deux normes sur E . Si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes alors pour toute suite $(u_n)_n$ de E et tout vecteur ℓ de E , $(u_n)_n$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si $(u_n)_n$ converge vers ℓ pour N_2 .

Démonstration

Soit $(u_n)_n$ une suite convergeant vers ℓ pour la norme N_1 . Soit $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leq \alpha N_1$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $N_1(u_n - \ell) \leq \epsilon/\alpha$.

On a donc pour $n \geq n_0$, $N_2(u_n - \ell) \leq \alpha N_1(u_n - \ell) \leq \epsilon$.

Ainsi $(u_n)_n$ converge vers ℓ pour N_2 .

La réciproque s'obtient en échangeant les rôles de N_1 et N_2 .

Attention! C'est faux si les normes ne sont pas équivalentes.

Par exemple, si $f_n(x) = n \left(\frac{1}{n} - x\right) \mathbf{1}_{[0, 1/n]}(x)$ pour $x \in [0, 1]$ alors la suite de fonctions continues (f_n) converge vers la fonction nulle en norme 1 mais ne converge pas pour la norme infinie.

Démonstration

$$N_1(f_n) = \int_0^1 |f_n(x)| dx = n \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) dx = n \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1/n} = n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2n}$$

et cette suite converge bien vers 0.

$N_\infty(f_n - \ell) = \max(|1 - \ell|, |\ell|) \geq \frac{1}{2}$ donc $(f_n)_n$ ne converge pas pour la norme infinie.

Proposition 13 Dans \mathbb{R}^N , une suite $(x_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^N$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ si et seulement si elle converge vers ℓ pour $\|\cdot\|_2$ si et seulement si elle converge vers ℓ pour $\|\cdot\|_\infty$. En particulier, $(x_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^N$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si les suites de ses coordonnées convergent dans \mathbb{R} .

Plus généralement, si on suppose l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^N , une suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ pour l'une des normes de \mathbb{R}^N si et seulement si les suites des coordonnées dans une base quelconque convergent dans \mathbb{R} vers les coordonnées de ℓ dans cette même base.

Démonstration Par équivalence des normes 1, 2 et infinie sur \mathbb{R}^N , la proposition 12 donne la première assertion. Comme les normes 1, 2 et infinie sont équivalentes sur \mathbb{R}^n . On munit \mathbb{R}^n de la norme infinie. La convergence d'une suite de \mathbb{R}^n vers un vecteur de \mathbb{R}^n est alors clairement équivalente à la convergence de chaque suite des coordonnées vers la coordonnée de la limite.

Lemme 2 Soit A une partie d'un evn E . Alors $a \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration

- Soit $a \in \bar{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $B(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, alors $\bar{A} \setminus B(a, \varepsilon) = \bar{A} \cap (E \setminus B(a, \varepsilon))$ est un fermé de E (en tant qu'intersection de deux fermés de E) qui contient A donc il contient le plus petit fermé de E contenant A , i.e. \bar{A} . Mais $a \in \bar{A}$ et $a \notin \bar{A} \setminus B(a, \varepsilon)$. C'est absurde.
- Si $a \notin \bar{A} = \bar{F}$ alors il existe une boule centrée en a qui n'intersecte pas F (le complémentaire de F est ouvert) donc pas A . Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Par contraposée on a la seconde implication.

Proposition 14 Soit A une partie d'un evn E . Alors $a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers a .

Démonstration

- Soit $a \in \bar{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $B(a, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ par la proposition précédente donc on peut choisir x_n dans cette intersection et on a $\|x_n - a\| \leq 1/n$. On a donc construit une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers a .
- S'il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers a , alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $x_n \in B(a, \varepsilon)$ et donc $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Par la proposition précédente, $a \in \bar{A}$.

Corollaire 1 Soit A une partie d'un evn E . A est fermée si et seulement si toute suite convergente de A converge vers un élément de A .

Démonstration A est fermée si et seulement si $\bar{A} \subset A$ si et seulement si toute suite convergente de A converge vers un élément de A par la proposition précédente.

Exemple 16 Dans \mathbb{R}^2 , $[1, 2[\times [0, 1]$ n'est pas fermé car $(2 - 1/n, 1/2)_n$ converge vers $(2, 1/2)$.

Corollaire 2 Soient A_1, \dots, A_n des parties de \mathbb{R} . Le sous-ensemble $A = A_1 \times \dots \times A_n$ est fermé (respectivement ouvert) dans \mathbb{R}^n muni de la norme 1, 2 ou infinie si et seulement si pour tout $i \in [1, n]$, A_i est un fermé (respectivement un ouvert) de \mathbb{R} .

Démonstration Découle de la proposition 13 et du corollaire.

Chapitre 2

Applications continues

2.1 Continuité, limite

2.1.1 Limite

Soient (E, N) et (F, N') deux evn. Soit A une partie de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

Définition 10 Soit $a \in \overline{A}$. On dit que f admet une limite en a s'il existe $y \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, N(x - a) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - y) < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Remarque 5 1. $a \in \overline{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : N(x - a) < \eta$.

2. Pour des normes N et N' fixées, on a unicité de la limite y lorsqu'elle existe. On écrit alors

$$y = \lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in A}} f(x).$$

3. (2.1) se réécrit $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $f(B_N(a, \eta) \cap A) \subset B_{N'}(y, \varepsilon)$.

4. Si $y = \lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in A}} f(x)$ et $B \subset A$ avec $a \in \overline{B}$, alors $y = \lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in B}} f(x)$.

En particulier, pour montrer que f n'admet pas de limite en a , il suffit de trouver deux sous-ensembles B et B' de A tels que $a \in \overline{B} \cap \overline{B'}$ et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in B}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in B'}} f(x).$$

5. On peut définir la limite épointée de f en a si $a \in A$ comme $\lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x)$.

Si cette limite épointée existe alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si et seulement si $f(a) =$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x).$$

Exemple 17 1. Si $E = F = \mathbb{R}$, on retrouve la notion usuelle de limite.

2. Si $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1 \neq \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 2$

donc f n'admet pas de limite (même épointée) en $(0,0)$.

Dans cet exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \neq \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y).$$

Attention! Pour démontrer l'existence d'une limite dans \mathbb{R}^n , il ne suffit pas de prendre la limite coordonnée par coordonnée.

Exemple 18 Si $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \end{cases}$, alors

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y)$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = 1/2$ donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Proposition 15 Soit $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ une partie de E et $a \in \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}$. Soit $f : A \rightarrow F$ une application. Si pour tout $i \in [1, n]$, $\lim_{x \in A_i} f(x) = \ell$, alors f admet ℓ pour limite en a .

Attention! Si $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$, la conclusion n'est plus nécessairement vraie, il faut que l'union soit finie.

Exemple 19 Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1\}$.

Si $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = 1$ et

$\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 1$ donc la limite de f en $(0,0)$ sur toutes les droites passant par l'origine est égale à 1. Pourtant

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x-2)^2 + y^2 = 4, (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y) = 0$$

donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Proposition 16 Si F est de dimension finie et (f_1, \dots, f_n) est une base de F et si $g : A \subset E \rightarrow F$, alors en écrivant $g(x) = g_1(x)f_1 + \dots + g_n(x)f_n$, on définit des fonctions $g_i : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ et on a

$$\forall i \in [1, n], \lim_{x \rightarrow a} g_i(x) = \ell_i \text{ où } \ell = \ell_1 f_1 + \dots + \ell_n f_n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

Si on suppose démontrée l'équivalence des normes en dimension finie alors c'est une équivalence.

Démonstration

On utilise

$$N_F(g(x) - \ell) = N_F\left(\sum_{i=1}^n (g_i(x) - \ell_i) f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |g_i(x) - \ell_i| N_F(f_i) \leq \max_{i=1}^n |g_i(x) - \ell_i| \sum_{i=1}^n N_F(f_i).$$

Si on suppose l'équivalence des normes alors on utilise la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(y_1 f_1 + \dots + y_n f_n) = \max_{i=1}^n |y_i|$$

pour démontrer l'autre implication.

Exemple 20 Si $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x + 3y, 2xy) \end{cases}$, alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = (2,0)$.

Attention! Pour déterminer la limite d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , on peut se ramener à la recherche de m limites de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} mais on ne peut pas se ramener à des limites de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Il ne suffit pas de séparer les coordonnées dans l'ensemble de départ sauf pour montrer qu'une limite n'existe pas.

Proposition 17 (Caractérisation séquentielle de la limite) *La fonction $f : A \subset E \rightarrow F$ admet ℓ pour limite en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ .*

Démonstration

- Soient $f : A \rightarrow F$ admettant ℓ pour limite en a et $(x_n)_n$ une suite de A qui converge vers a . Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B_E(a, \alpha)$, $f(x) \in B_F(\ell, \epsilon)$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $N_E(x_n - a) < \alpha$. On a donc pour $n \geq N$, $x_n \in B_E(a, \alpha)$ donc $f(x_n) \in B_F(\ell, \epsilon)$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$.
- Soit $f : A \rightarrow F$ n'admettant pas ℓ pour limite en a . Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ tel que $N_E(x_n - a) \leq \frac{1}{n}$ et $N_F(f(x_n) - \ell) \geq \epsilon$. Ainsi la suite $(x_n)_n$ converge dans A vers a et $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers ℓ . Par contraposée on a montré la réciproque.

Exemple 21 La fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \sin(1/y) \end{matrix}$ n'admet pas de limite en $(1, 0)$.

Démonstration

Si $y_n = \frac{1}{\pi n}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1, y_n) = 0$ mais si $y'_n = \frac{1}{\pi(2n+1/2)}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1, y'_n) = 1$ alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = 0$.

Proposition 18 *Si f et g ont une limite ℓ et ℓ' en a , alors*

- $f + g$ admet $\ell + \ell'$ pour limite en a ;
 - pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λf admet $\lambda \ell$ pour limite en a .
- Si de plus f et g sont à valeurs dans \mathbb{K} , alors*
- fg admet $\ell \ell'$ pour limite en a ;
 - si de plus g ne s'annule pas sur A et si $\ell' \neq 0$, f/g admet ℓ/ℓ' pour limite en a .
 - Si $f : A \subset E \rightarrow F$ et $h : B \subset F \rightarrow H$ avec $a \in \bar{A}$, $f(A) \subset B$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \bar{B}$ et $\lim_{y \rightarrow b} h(y) = \ell$, alors $h \circ f$ admet ℓ pour limite en a .

2.1.2 Continuité

Soient (E, N) et (F, N') deux evn. Soit A une partie de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

Définition 11 *Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (dans ce cas, elle vaut $f(a)$ car $a \in A \cap B(a, \eta)$ pour tout $\eta > 0$), i.e. si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, N(x - a) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - f(a)) < \epsilon.$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

Exemple 22 1. La norme N définie une application continue de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ car $|N(x) - N(a)| \leq N(x - a)$.

2. **Définition 12** *Soit k un réel positif. Une application $f : A \rightarrow F$ est k -Lipschitzienne si pour tous $x, x' \in A$,*

$$N'(f(x) - f(x')) \leq kN(x - x').$$

Si f est Lipschitzienne alors elle est continue.

3. Soit $a \in E$. L'application $f : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & N(x - a) \end{matrix}$ est continue car 1-Lipschitzienne.

4. Supposons E muni de deux normes N_1 et N_2 . L'application $id_E : (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ est continue si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in E, N_2(x) \leq cN_1(x)$. Elle est donc bicontinue si et seulement si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Démonstration

La réciproque est claire car une fonction Lipschitzienne est continue et si $\forall x \in E, N_2(x) \leq cN_1(x)$, alors $id_E : (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ est Lipschitzienne car $|N_2(x) - N_2(y)| \leq N_2(x - y) \leq cN_1(x - y)$.

Si $id_E : (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ est continue en 0 alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in E, N_1(y) \leq \alpha \Rightarrow N_2(y) \leq 1$. On a donc pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\frac{\alpha}{N_1(x)} N_2(x) = N_2\left(\frac{\alpha x}{N_1(x)}\right) \leq 1 \quad \text{i.e.} \quad N_2(x) \leq \frac{1}{\alpha} N_1(x).$$

5. Si E est un evn de dimension finie et si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors pour tout $i \in [1, n]$, l'application $f_i : E \rightarrow \mathbb{K}$ qui à $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \in E$ associe la i ème coordonnée x_i est continue pour la norme N_∞ définie par $N_\infty(x) = \max_{i=1}^n |x_i|$.

2.1.3 Lien entre topologie et continuité

Théorème 3 Une application $f : (E, N) \rightarrow (F, N')$ est continue si et seulement si pour tout ouvert O de F , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E .

Démonstration

- Supposons f continue sur E . Soit O un ouvert de F . Soit $a \in f^{-1}(O)$. Alors $f(a) \in O$ et il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f(a), \epsilon) \subset O$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ puisque f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E, N_E(x - a) < \alpha \Rightarrow N_F(f(x) - f(a)) < \epsilon$. Ainsi $x \in B_E(a, \alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon) \subset O$ donc $B_E(a, \alpha) \subset f^{-1}(O)$. $f^{-1}(O)$ est bien un ouvert.
- Supposons que pour tout ouvert O de F , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E . Soit $a \in E$ et $\epsilon > 0$. $B(f(a), \epsilon)$ est un ouvert de F donc $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ est un ouvert de E et il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Ainsi pour tout $x \in E$ tel que $N_E(x - a) < \alpha$, on a $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$ donc $N_F(f(x) - f(a)) < \epsilon$. On a bien f continue en a .

Remarque 6 Cette propriété permet de donner une définition de la continuité qui se généralise aux espaces topologiques, on n'a pas besoin de normes.

Exemple 23 L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ de \mathbb{R} par l'application continue

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x - y \end{cases}$$

Corollaire 3 f est continue sur E si et seulement si pour tout fermé B de F , $f^{-1}(B)$ est un fermé de E .

Démonstration B est un fermé de F ssi $F \setminus B$ est un ouvert de F . De plus $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

On utilise la caractérisation avec les ouverts pour obtenir celle avec les fermés.

Proposition 19 Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ une application et soit $a \in A$. f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Démonstration Provient de la caractérisation séquentielle de la limite et de la définition de la continuité.

2.1.4 Exemples de fonctions continues

Proposition 20 Soient E, F, G des espaces vectoriels normés. Soit A une partie de E et $a \in A$.

1. Si $f : A \subset E \rightarrow F$ est continue en a et $g : F \rightarrow G$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .
2. Si $f, g : A \subset E \rightarrow F$ sont continues en a , alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a .
3. Si $f : A \subset E \rightarrow F$ et $\varphi : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues en a , alors $\varphi \cdot f$ est continue en a .

Corollaire 4 1. Tout polynôme sur \mathbb{K}^n , i.e. toute application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur \mathbb{K}^n .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{0 \leq k_i \leq N} \alpha_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \end{array} \right. \text{ est continue sur } \mathbb{K}^n.$$

2. $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est continue pour une norme équivalente à la norme infinie si et seulement si pour tout $j \in [1, m]$, f_j est continue.

Exemple 24 Les fonctions $f : A \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ dont les fonctions coordonnées f_j s'expriment comme des sommes, produits, quotients, composées de fonctions usuelles continues en les coordonnées sont continues sur leur ensemble de définition.

Par exemple la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (\ln(x^2 + y^2), \sin(xy)e^{2y})$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exemple 25 L'application déterminant de $M_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice.

L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est donc ouvert en tant qu'image réciproque par cette application de l'ouvert \mathbb{R}^* de \mathbb{R} .

Proposition 21 Si E est muni de deux normes N_1 et N_2 équivalentes, F est muni de deux normes N'_1 et N'_2 équivalentes, alors $f : A \rightarrow F$ est continue pour N_1, N'_1 si et seulement si f est continue pour N_2, N'_2 .

Démonstration On compose des applications continues (l'identité de E et celle de F avec les normes correspondantes et la fonction f).

2.2 Applications linéaires continues

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux evn. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E vers F .

Rappel : $\varphi : E \rightarrow F$ est linéaire ssi

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y).$$

Théorème 4 Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. φ est continue ;
2. φ est continue en 0 ;
3. $\exists M > 0, \forall x \in E \|\varphi(x)\|_F \leq M\|x\|_E$;
4. φ est bornée sur $\overline{B}_E(0, 1)$;
5. φ est bornée sur $\{x \in E : \|x\|_E = 1\}$;
6. φ est Lipschitzienne ;
7. φ est uniformément continue sur E .

Démonstration

— 1 \Rightarrow 2

Évident.

— 2 \Rightarrow 3

Si φ est continue en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|\varphi(x)\|_F \leq 1$.

Pour $x \neq 0$, on a donc $\|\varphi\left(\frac{\alpha x}{\|x\|_E}\right)\|_F \leq 1$ donc par linéarité $\|\varphi(x)\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\alpha}$, ce qui est encore vrai pour $x = 0$.

— 3 \Rightarrow 4

Si $\exists M > 0, \forall x \in E \|\varphi(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ alors pour tout $x \in \overline{B}_E(0, 1), \|\varphi(x)\|_F \leq M$.

— 4 \Rightarrow 5

Évident.

— 5 \Rightarrow 6

Si il existe $M > 0$ tel que pour $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1, \|\varphi(x)\|_F \leq M$ alors pour $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, on a $\|\varphi\left(\frac{x-y}{\|x-y\|_E}\right)\|_F \leq M$ donc par linéarité $\|\varphi(x-y)\|_F \leq M\|x-y\|_E$ et φ est Lipschitzienne.

— 6 \Rightarrow 7

Toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue car si $\|\varphi(x-y)\|_F \leq M\|x-y\|_E$ alors

$\|x-y\|_E \leq \epsilon/M \Rightarrow \|\varphi(x-y)\|_F \leq \epsilon$.

— 7 \Rightarrow 1

Évident.

Définition 13 On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

Théorème 5 Soit φ une applications linéaire continue de E dans F . Alors

$$\sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\varphi(x))}{N_E(x)} = \sup_{x \in E: N_E(x)=1} N_F(\varphi(x)) = \sup_{x \in \overline{B}_E(0,1)} N_F(\varphi(x)).$$

La valeur commune de ces bornes supérieures est un réel positif ou nul que l'on note $\|\varphi\|$.

L'application $\mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $\varphi \mapsto \|\varphi\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée norme subordonnée.

Démonstration

— Notons

$$M_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\varphi(x))}{N_E(x)}, \quad M_2 = \sup_{x \in E : N_E(x)=1} N_F(\varphi(x)), \quad M_3 = \sup_{x \in \overline{B}_E(0,1)} N_F(\varphi(x)).$$

- D'après le théorème 4, M_1 , M_2 et M_3 sont bien définies et sont des réels positifs ou nuls.
- Pour $x \in E$ tel que $N_E(x) = 1$, on a $N_F(\varphi(x)) = \frac{N_F(\varphi(x))}{N_E(x)} \leq M_1$ donc M_1 est un majorant de l'ensemble $\{N_F(\varphi(x)), x \in E : N_E(x) = 1\}$ et donc $M_2 \leq M_1$ puisque M_2 est le plus petit majorant de cet ensemble.
- Pour $x \neq 0$, on a par linéarité de φ et homogénéité de la norme

$$\frac{N_F(\varphi(x))}{N_E(x)} = N_F\left(\frac{\varphi(x)}{N_E(x)}\right) = N_F\left(\varphi\left(\frac{x}{N_E(x)}\right)\right) \leq M_2$$

car $N_E\left(\frac{x}{N_E(x)}\right) = 1$. Ainsi $M_1 \leq M_2$ et donc $M_1 = M_2$.

- Clairement

$$M_2 = \sup_{x \in E : N_E(x)=1} N_F(\varphi(x)) \leq M_3 = \sup_{x \in \overline{B}_E(0,1)} N_F(\varphi(x)).$$

- Si $x \in \overline{B}_E(0,1)$ alors $N_F(\varphi(x)) \leq M_1 N_E(x) \leq M_1$ donc $M_3 \leq M_1$.

Ainsi $M_1 = M_2 = M_3$. Cela démontre la première assertion.

— Montrons à présent que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E, F) & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \varphi & \mapsto & \|\varphi\| \end{array}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

- Cette application est bien définie sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ par le théorème 4.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\|\varphi\| = 0$ alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $N_F(\varphi(x)) \leq \|\varphi\| N_E(x) = 0$ donc $N_F(\varphi(x)) = 0$ par positivité de N_F et donc par séparabilité de N_F , $\varphi(x) = 0$. Si $x = 0$, par linéarité, on a aussi $\varphi(x) = 0$ donc φ est l'application nulle, ce qui montre la séparabilité de $\|\cdot\|$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\|\lambda\varphi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\lambda\varphi(x))}{N_E(x)} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| N_F(\varphi(x))}{N_E(x)} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\varphi(x))}{N_E(x)} = |\lambda| \|\varphi\|,$$

ce qui donne l'homogénéité.

- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\varphi(x) + \psi(x))}{N_E(x)} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\varphi(x)) + N_F(\psi(x))}{N_E(x)} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\varphi(x))}{N_E(x)} + \sup_{x \neq 0} \frac{N_F(\psi(x))}{N_E(x)} = \|\varphi\| + \|\psi\|, \end{aligned}$$

c'est à dire l'inégalité triangulaire.

Ainsi $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Théorème 6 *En supposant l'équivalence de toutes les normes sur \mathbb{K}^n , on a : toutes les applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m sont continues par rapport à n'importe quelle norme.*

Démonstration Par équivalence des normes, il suffit de le montrer pour les normes infinies sur \mathbb{K}^n et sur \mathbb{K}^m , notées N_E et N_F . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n . Posons $M = \sum_{i=1}^n \|\varphi(e_i)\|_F$. On a pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\|_F &= \|\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\|_F \leq \|\varphi(x_1 e_1)\|_F + \dots + \|\varphi(x_n e_n)\|_F \\ &= |x_1| \|\varphi(e_1)\|_F + \dots + |x_n| \|\varphi(e_n)\|_F \leq M \|x\|_E. \end{aligned}$$

Ainsi par le théorème 4, φ est continue.

Théorème 7 *En supposant l'équivalence de toutes les normes en dimension finie, on a : toutes les applications linéaires de E dans F sont continues par rapport à n'importe quelle norme si on suppose E et F de dimension finie.*

Attention ! La continuité ne dépend pas des normes mais la norme subordonnée associée dépend des normes sur E et F .

Exemple 26 1. $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x + y \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\|\varphi\| = 2$ si \mathbb{R}^2 est muni de la norme infinie, $\|\varphi\| = 1$ si \mathbb{R}^2 est muni de la norme 1.

Démonstration

- $|\varphi(x, y)| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\|_\infty$ donc $\|\varphi\|_{(\infty)} \leq 2$.
- De plus $|\varphi(x, x)| = 2|x| = 2\|(x, x)\|_\infty$ donc $\|\varphi\|_{(\infty)} = 2$.
- $|\varphi(x, y)| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1$ donc $\|\varphi\|_{(1)} \leq 1$.
- De plus $|\varphi(x, x)| = 2|x| = \|(x, x)\|_1$ donc $\|\varphi\|_{(1)} = 1$.

2. Si E est un ev de dimension finie et F un sev de E , alors F est fermé.
 En effet, on peut considérer un supplémentaire G de F dans E ($E = F \oplus G$) et la projection p de E sur G parallèlement à F . L'application p est continue car linéaire en dimension finie et on obtient $F = \text{Ker}(p) = p^{-1}(\{0\})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

3. **Exemple en dimension infinie**

$\varphi: (C^1([0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C^0([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$
 $f \mapsto f'$ est linéaire mais non continue.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$.
 Alors $f_n \in (C^1([0, 1]))$ et $\|\varphi(f_n)\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |nx^{n-1}| = n$ alors que $\|f_n\|_\infty = 1$.
 Ainsi $\|\varphi\| \geq n$ et donc φ n'est pas bornée sur la boule unité fermée et donc elle n'est pas continue.

Remarque 7 Pour calculer une norme induite, on procèdera toujours comme dans le premier exemple. On majore $\|\varphi(x)\|_F$ par $M\|x\|_E$ (ou par M pour $\|x\|_E \leq 1$) et on cherche $x \in E$ tel que $\|\varphi(x)\|_F = M\|x\|_E$ ou $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$ et $\|\varphi(x)\|_F = M\|x\|_E$. Comme on le verra plus tard, en cas de continuité de φ , la norme de φ est toujours atteinte.

2.3 Applications multilinéaires continues

Théorème 8 Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ des evn, F un evn et $u: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application n -linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_n$;
2. u est continue en $0 = (0_{E_1}, \cdots, 0_{E_n})$;
3. u est bornée sur $\overline{B}_1 \times \cdots \times \overline{B}_n$ où B_i est la boule unité fermée de E_i ;
4. u est bornée sur $S_1 \times \cdots \times S_n$ où $S_i = \{x \in E_i : N_i(x) = 1\}$;
5. $\exists M > 0, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ $N_F(u(x_1, \cdots, x_n)) \leq MN_1(x_1) \cdots N_n(x_n)$.

Exemple 27 L'application $(x, y) \mapsto xy$ de \mathbb{K}^2 dans \mathbb{K} est continue sur \mathbb{K}^2 .

L'application $\phi: M_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
 $(A, B) \longmapsto AB$ est bilinéaire et continue.

Remarque 8 Une application multilinéaire continue est uniformément continue sur les parties bornées de E seulement.

Chapitre 3

Compacité (principalement en dimension finie)

3.1 Définition, premières propriétés

Définition 14 Soit K une partie d'un evn E . On dit que K est compacte ou que K est un compact si et seulement si de toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K (elle converge et la limite est dans K).

Exemple 28 — Un singleton est compact.

— Une famille finie de vecteurs est compacte.

Démonstration

Soit $A := \{a_1, \dots, a_k\}$ une famille finie de vecteurs et $(x_n)_n$ une suite de A . Alors il existe $i \in [1, k]$ tel que $\{n \in \mathbb{N} : x_n = a_i\}$ est infini. Si on se restreint à cet ensemble d'indice, on obtient une suite extraite de $(x_n)_n$ qui est convergente car stationnaire.

Théorème 9 (Bolzano-Weierstrass) Si a, b sont des réels et $a \leq b$ alors le segment $[a, b]$ est un compact de \mathbb{R} .

Démonstration

Soit $(x_n)_n$ une suite de $[a, b]$.

On va procéder par récurrence et dichotomie pour construire une suite strictement croissante d'indices $(n_k)_k$ telle que la suite $(x_{n_k})_k$ converge.

On a $[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b] = I_1 \cup I_2$ et donc $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2$ avec $A_i = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_i\}$ et l'un des ensembles A_1 ou A_2 au moins est infini. Si A_1 est infini, on pose $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ et $n_1 = \min A_1$. Si A_1 est fini, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$ et $n_1 = \min A_2$.

On a $0 \leq b_1 - a_1 \leq \frac{b-a}{2}$ et $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$.

Supposons $(n_1, a_1, b_1), \dots, (n_{k-1}, a_{k-1}, b_{k-1})$ construits tels que $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ sont des entiers naturels, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{k-1} < b_{k-1} \leq b_{k-2} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ sont des réels, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a_{k-1}, b_{k-1}]\}$ est infini, pour tout $i < k$, $0 \leq b_i - a_i \leq \frac{b-a}{2^i}$ et $x_{n_i} \in [a_i, b_i]$.

L'un des ensembles $\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right]\right\}$ ou $\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \left[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]\right\}$ est infini. Si le premier est infini, on pose $a_k = a_{k-1}$, $b_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ et n_k est le plus petit indice supérieur à n_{k-1} dans ce premier ensemble d'indice. Sinon, on pose $b_k = b_{k-1}$, $a_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ et n_k est le plus petit indice supérieur à n_{k-1} dans le second ensemble d'indices. On a bien $n_k > n_{k-1}$, $a_k \geq a_{k-1}$, $b_k \geq b_{k-1}$, $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2} \leq \frac{b-a}{2^k}$ et $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a_k, b_k]\}$ est infini.

On a ainsi construit par récurrence une suite d'indices $(n_k)_k$ telle que $(x_{n_k})_k$ est de Cauchy. En effet si $\epsilon > 0$, soit k tel que $\frac{b-a}{2^k} < \epsilon$. Pour $i \geq k$, on a $x_{n_i} \in [a_{n_k}, b_{n_k}]$ donc pour $i, j \geq k$, $|x_{n_i} - x_{n_j}| \leq b_{n_k} - a_{n_k} \leq \frac{b-a}{2^k} < \epsilon$. Comme \mathbb{R} est complet, toute suite de Cauchy est convergente donc $(x_{n_k})_k$ converge dans \mathbb{R} . Comme c'est une suite de $[a, b]$ qui est fermé, elle converge dans $[a, b]$. $[a, b]$ est un compact de \mathbb{R} .

Proposition 22 *Soit $K \subset E$ un compact et $F \subset K$ un fermé. Alors F est compact.*

Démonstration

Soit $(x_n)_n$ une suite de F . Elle admet une sous-suite convergente dans le compact K . Notons x sa limite. Comme F est fermé et que x est la limite d'une suite de F , on a $x \in F$. Ainsi F est compact.

Proposition 23 *Soit K une partie compacte d'un evn E . Alors K est fermée et bornée.*

Démonstration

Soit K un compact d'un evn E . Soit $(x_n)_n$ une suite convergente de K , alors elle admet une sous-suite qui converge vers un élément de K donc la limite est dans K et K est fermée. Supposons par l'absurde que K n'est pas bornée. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ de K telle que la suite numérique $(\|x_n\|)_n$ tende vers $+\infty$. Comme toute suite convergente est bornée, aucune sous-suite de la suite $(x_n)_n$ ne peut converger, ce qui contredit la compacité de K .

Proposition 24 (Produit de compacts) *Soient $K_1 \subset E_1$ et $K_2 \subset E_2$ deux compacts. Alors $K_1 \times K_2$ est compact dans $E_1 \times E_2$ muni de la norme produit $N(x_1, x_2) = \max(N_1(x_1), N_2(x_2))$.*

Plus généralement un produit fini de compacts est compact pour la norme produit.

Démonstration

Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de $K_1 \times K_2$. Comme K_1 est compact il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge dans K_1 vers x . La suite $(y_{\varphi(n)})_n$ est une suite du compact K_2 donc il existe une application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(y_{\psi \circ \varphi(n)})_n$ converge dans K_2 vers y . En tant que suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$, la suite $(x_{\psi \circ \varphi(n)})_n$ converge dans K_1 vers x . Ainsi la suite $(x_{\psi \circ \varphi(n)}, y_{\psi \circ \varphi(n)})_n$ extraite de $(x_n, y_n)_n$ converge vers (x, y) dans $K_1 \times K_2$ et $K_1 \times K_2$ est bien compact.

Par récurrence, on obtient le résultat pour un produit fini.

Corollaire 5 *Si E est un evn de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors les boules fermées pour la norme infinie par rapport à \mathcal{B} définie par $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$ si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ sont compactes.*

Démonstration

La boule fermée de E de centre a et de rayon R est isomorphe à $[a - R, a + R] \times \dots \times [a - R, a + R]$ et $[a - R, a + R]$ est compact donc le produit aussi.

Exemple 29 $[-1, 1]^n$ est un compact de \mathbb{R}^n .

3.2 Continuité et compacité

Théorème 10 *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Démonstration

Soient K un compact, $f : K \rightarrow F$ une application continue et $(y_n)_n$ une suite de $f(K)$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$.
 La suite $(x_n)_n$ du compact K admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente vers $x \in K$.
 Par continuité de f , la suite $(y_{n_k})_k = (f(x_{n_k}))_k$ converge vers $y = f(x) \in f(K)$.
 Ainsi $f(K)$ est compact.

Corollaire 6 Une fonction continue sur un compact à valeurs dans \mathbb{R} est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

Soient K un compact et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. L'image de K par f est un compact de F et est donc bornée et donc f est bornée.
 Si $a = \inf(f(K))$ et $b = \sup(f(K))$, alors comme $f(K)$ est fermé car compact, $a, b \in f(K)$.
 Ainsi il existe $x, y \in E$ tel que $a = f(x)$ et $b = f(y)$.

Exemple 30 Distance à une partie. Soit $K \subset E$ un compact. Alors pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n , il existe $y \in K$ tel que $N(x - y) = \inf_{z \in K} N(x - z)$. On appelle cette valeur la distance de x à K et on la note $d(x, K)$.

Théorème 11 (Heine) Toute application continue sur un compact K est uniformément continue sur K .

Démonstration

Supposons par l'absurde $f : K \rightarrow F$ continue sur le compact K mais pas uniformément continue. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n, y_n \in K$ tels que $\|x_n - y_n\|_E \leq 1/n$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\|_F \geq \epsilon$.
 Comme K est compact, on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans K vers x . La suite $(y_{\varphi(n)})_n$ est une suite du compact K donc on peut en extraire une suite $(y_{\psi \circ \varphi(n)})_n$ qui converge dans K vers y . En tant que suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$, la suite $(x_{\psi \circ \varphi(n)})_n$ converge dans K vers x . Comme $\|x_n - y_n\|_E \leq 1/n$ pour tout n , on a $x = y$. Par continuité de f , la suite $(f(x_{\psi \circ \varphi(n)}))_n$ converge vers $f(x)$ et la suite $(f(y_{\psi \circ \varphi(n)}))_n$ converge vers $f(y)$. Mais en passant à la limite, $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon > 0$. C'est impossible puisque $f(x) = f(y)$ donc on a bien une contradiction.

3.3 Équivalence des normes en dimension finie. Compact=fermé, borné.

Théorème 12 Soient N_1 et N_2 deux normes sur un evn de dimension finie. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$, i.e. les normes sont équivalentes en dimension finie.

Démonstration

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Par transitivité de la relation d'équivalence, il suffit de montrer que toute norme N sur E est équivalente à N_∞ définie par $N_\infty(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \max_{i=1}^n |x_i|$. On a d'une part pour $x \in E$

$$\begin{aligned} N(x) &= N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) \text{ par inégalité triangulaire pour } N \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \text{ par homogénéité de } N \\ &\leq N_\infty(x) \sum_{i=1}^n N(e_i) \text{ par définition de } N_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi en posant $\beta = \sum_{i=1}^n N(e_i)$, on a $N(x) \leq \beta N_\infty(x)$ pour tout $x \in E$.

Posons $K = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$. K est un compact de E car il est fermé dans $\overline{B_{N_\infty}}(0, 1)$ que l'on a montrée compacte. L'application $N : (E, N_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue car Lipschitzienne puisque $|N(x) - N(y)| \leq |N(x - y)| \leq \beta N_\infty(x - y)$ pour $x, y \in E$. Ainsi N est bornée sur K et y atteint sa borne inférieure. Il existe $x_0 \in E$ tel que $N(x_0) = \min_{x \in K} N(x)$. Comme $x_0 \in K$, $N_\infty(x_0) = 1 \neq 0$ donc $x_0 \neq 0_E$ et donc $N(x_0) \neq 0$. Ainsi $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $x/N_\infty(x) \in K$ donc $N(x/N_\infty(x)) \geq N(x_0)$ et $N(x) \geq N_\infty(x)N(x_0)$. En choisissant $\alpha = N(x_0) > 0$, on a donc $N(x) \geq \alpha N_\infty(x)$.

Les norme N et N_∞ sont équivalentes.

Proposition 25 *Si une suite $(x_n)_n$ d'un ev de dimension finie F converge alors pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k)$ de F , les suites $((x_n)_i)_n$ des coordonnées de x_n dans la base \mathcal{B} convergent dans \mathbb{K} .*

Démonstration

Par équivalence des normes, il suffit de le montrer pour F muni de N_∞ pour la base \mathcal{B} . On utilise ensuite $|x_i - y_i| \leq N_\infty(x - y)$ et donc l'application qui à x associe x_i est continue car Lipschitzienne.

Corollaire 7 *Soit (E, N_E) un evn. Soit F un sev de E de dimension finie et \mathcal{B} une base de F . Alors F est un fermé de E et une suite $(x_n)_n$ de F converge vers x si et seulement si les suites des coordonnées de x_n dans la base \mathcal{B} tendent vers les coordonnées de x .*

Théorème 13 *Soit E un evn de dimension finie. Soit K une partie de E . Alors K est compacte si et seulement si K est fermée et bornée.*

Démonstration

On a déjà montré que tout compact est fermé et borné.

Si de plus E est de dimension finie, soit K une partie fermée et bornée de E . Les normes sur E étant équivalentes, on peut munir E de la norme N_∞ associée à une base \mathcal{B} de E . K est borné donc inclus dans une boule $\overline{B_{N_\infty}}(0, R)$ qui est compacte. Ainsi K est un fermé dans un compact donc c'est un compact.

Théorème 14 (Riesz) *Un evn est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

Démonstration

On a vu que si un evn est de dimension finie alors la boule unité fermée, qui est fermée et bornée, est compacte.

Pour la réciproque, on commence par un lemme.

Lemme 3 Soit F un sev de E . On suppose E de dimension infinie et F de dimension finie. Alors il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) \geq \frac{1}{2}$.

Démonstration du lemme

Soit $y \in E \setminus F$. Notons $\delta = d(y, F) = \inf\{\|y - z\|, z \in F\}$.

F est fermé et $y \notin F$ donc $\delta > 0$. Sinon, on pourrait prendre une suite $(z_n)_n$ de F telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|z_n - y\| = 0$. En particulier, pour n assez grand on aurait $z_n \in F \cap \overline{B}(y, 1 + \delta)$ donc z_n est une suite d'un compact (en tant que fermé borné dans F de dimension finie) et admet donc une sous-suite convergente dans F vers $z \in F$. On a donc $\|y - z\| = 0$ et donc $y = z \in F$, ce qui contredit les hypothèses.

Ainsi $2\delta > \delta > 0$ donc il existe $z \in F$ tel que $\|y - z\| \leq 2\delta$. Posons $x = \frac{y-z}{\|y-z\|}$. Alors $\|x\| = 1$ et pour tout $u \in F$, $\|u - x\| = \left\| u - \frac{y-z}{\|y-z\|} \right\| = \frac{1}{\|y-z\|} \|y - (z + \|y-z\|u)\| \geq \frac{\delta}{\|y-z\|} \geq \frac{1}{2}$ car $z + \|y-z\|u \in F$. Ainsi $d(x, F) \geq \frac{1}{2}$.

Supposons désormais E de dimension infinie et montrons que $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

On va construire une suite $(x_n)_n$ infinie telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $n < m \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$.

Soit x_0 un vecteur de E de norme 1.

Supposons x_0, x_1, \dots, x_n construits tels que $\|x_k\| = 1$ pour tout $k \leq n$ et pour tout $k < m \leq n$, $\|x_k - x_m\| \geq \frac{1}{2}$.

Le sous-espace vectoriel F_n engendré par x_0, x_1, \dots, x_n est de dimension finie donc d'après le lemme, on peut choisir x_{n+1} de norme 1 tel que $d(x_{n+1}, F_n) \geq \frac{1}{2}$. Ainsi x_{n+1} vérifie bien les propriétés requises. La suite $(x_n)_n$ de la boule unité fermée n'admet pas de suite extraite convergente donc la boule unité fermée n'est pas compacte.

Chapitre 4

Différentiabilité

On cherche à étendre la notion de dérivée aux fonctions définies sur un evn.

Si f est définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R} , f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$ ssi $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$. Il s'agit d'une approximation linéaire.

Graphiquement, le graphe de la fonction f est proche de la tangente d'équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$ au voisinage de a .

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on peut représenter f par la surface dans \mathbb{R}^3 d'équation $z = f(x, y)$. On va chercher à approcher cette surface au voisinage d'un point $a = (x_a, y_a)$ par un plan d'équation $z = \alpha x + \beta y$. On approchera donc f au voisinage de a par une application linéaire $L(x, y) = \alpha x + \beta y$.

Dans le cas général, on va chercher à approcher $f : A \subset E \rightarrow F$ par une application linéaire de E dans F .

4.1 Différentiabilité

4.1.1 Définitions, premiers exemples

Définition 15 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn de dimension finie. Soient U un ouvert de E et $x_0 \in U$.

On dit que $f : U \rightarrow F$ est différentiable au point x_0 s'il existe une application linéaire $L : E \rightarrow F$ telle que

$$\lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

i.e. s'il existe $\varepsilon : U \rightarrow F$ telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|_E \varepsilon(h).$$

On note alors $L = Df_{x_0}$, L est la différentielle de f au point x_0 .

Remarque 9 1. Comme U est un ouvert et $x_0 \in U$, alors $x_0 + h \in U$ pour $\|h\|_E$ assez petit et donc $f(x_0 + h)$ est bien défini.

2. On note $o(h)$ toute fonction telle que $o(h) = \|h\|_E \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

3. Les normes étant équivalentes en dimension finie, la notion de différentielle ne dépend pas des normes choisies.

4. La différentielle est unique. Ainsi Df_{x_0} est la meilleure approximation linéaire de f autour de x_0 .

Démonstration

Si $f(x+h) - f(x) = L_1(h) + o(h) = L_2(h) + o(h)$, alors $(L_1 - L_2)(h) = o(h)$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = 0$ donc pour tout $y \neq 0$, $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(L_1 - L_2)(y/n)}{\|y/n\|} = \frac{(L_1 - L_2)(y)}{\|y\|}$. Par linéarité de $L_1 - L_2$ et homogénéité de la norme. L'application $L_1 - L_2$ est de norme subordonnée nulle donc elle est nulle et $L_1 = L_2$.

5. Si $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow F$, $x_0 \in U \cap V$ et $f = g$ sur une boule $B(x_0, r)$ avec $r > 0$, alors $Df_{x_0} = Dg_{x_0}$, la différentielle est donc une notion locale.
6. En dimension infinie, la définition est la même mais on impose de plus que l'application linéaire L est continue (ce qui est toujours vrai en dimension finie).

Exemple 31 1. Si $L : E \rightarrow F$ est linéaire, alors L est différentiable sur E et pour tout $x_0 \in E$, $DL_{x_0} = L$, la différentielle est donc dans ce cas indépendante de x_0 . En effet $L(x+h) = L(x) + L(h)$ et L est linéaire en h .

2. Si $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 , alors elle est différentiable en x_0 et $Df_{x_0} : h \mapsto f'(x_0)h$.
En effet un DL d'ordre 1 donne $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$ et $h \mapsto hf'(x)$ est linéaire.

3. Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en x_0 , alors le plan d'équation $z = Df_{(x_0, y_0)}(x, y)$ est appelé plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) .

4. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$, alors f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et $Df_A : H \mapsto AH + HA$.

En effet $(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$, $H \mapsto AH + HA$ est linéaire et $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|H^2\|}{\|H\|} = 0$.

5. Si $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire alors f est différentiable sur $E \times E$ et pour tout $(x, y) \in E \times E$, $DL_{(x,y)}(h, k) = f(x, k) + f(y, h)$.

En effet $f(x+h, y+k) = f(x, y) + f(h, y) + f(x, k) + f(h, k)$,

$(h, k) \mapsto f(h, y) + f(x, k)$ est linéaire et

$\|f(h, k)\|_F \leq M\|h\|_E\|k\|_E \leq M\|(h, k)\|_{E \times E}^2$ car f est bilinéaire continue (car dimension finie).

4.1.2 Opérations sur les différentielles

Proposition 26 Soit U un ouvert de E .

1. Linéarité : Si $f, g : U \subset E \rightarrow F$ sont différentiables au point $x_0 \in U$ alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable au point x_0 et

$$D(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda Df_{x_0} + \mu Dg_{x_0}.$$

2. Produit : Si $f, g : U \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ sont différentiables au point $x_0 \in U$ alors fg est différentiable au point x_0 et

$$D(fg)_{x_0} = g(x_0)Df_{x_0} + f(x_0)Dg_{x_0}.$$

3. Quotient : Si $f, g : U \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ sont différentiables au point $x_0 \in U$ avec $g(x_0) \neq 0$ alors f/g est différentiable au point x_0 et

$$D(f/g)_{x_0} = \frac{g(x_0)Df_{x_0} - f(x_0)Dg_{x_0}}{g(x_0)^2}.$$

4. Composition : Soient E, F, G trois evn de dimension finie et $f : U \subset E \rightarrow F$, $g : V \subset F \rightarrow G$, avec $f(U) \subset V$. Soit $x_0 \in U$. Si f est différentiable au point x_0 et g est différentiable au point $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est différentiable au point x_0 et

$$\begin{aligned} D(g \circ f)_{x_0} &= Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0}. \\ &\in \mathcal{L}(E, G) \quad \in \mathcal{L}(F, G) \quad \in \mathcal{L}(E, F) \end{aligned}$$

Démonstration

1. Si $F = \lambda f + \mu g$, alors

$$\begin{aligned} F(x+h) &= \lambda f(x+h) + \mu g(x+h) \\ &= \lambda(f(x) + Df_x(h) + o(h)) + \mu(g(x) + Dg_x(h) + o(h)) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) + \lambda Df_x(h) + \mu Dg_x(h) + o(h) \\ &= F(x) + \lambda Df_x(h) + \mu Dg_x(h) + o(h). \end{aligned}$$

Comme $h \mapsto \lambda Df_x(h) + \mu Dg_x(h)$ est linéaire, on a bien F différentiable en x et $DF_x = \lambda Df_x + \mu Dg_x$.

2. Si $F = fg$, alors

$$\begin{aligned} F(x+h) &= f(x+h)g(x+h) \\ &= (f(x) + Df_x(h) + o(h))(g(x) + Dg_x(h) + o(h)) \\ &= f(x)g(x) + f(x)Dg_x(h) + g(x)Df_x(h) + (f(x) + Df_x(h) + g(x) + Dg_x(h) + o(h))o(h) \\ &= F(x) + f(x)Dg_x(h) + g(x)Df_x(h) + o(h), \end{aligned}$$

où on a utilisé $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) + Df_x(h) + g(x) + Dg_x(h) + o(h) = f(x) + g(x)$ donc $(f(x) + Df_x(h) + g(x) + Dg_x(h) + o(h))o(h) = o(h)$.

Comme $h \mapsto f(x)Dg_x(h) + g(x)Df_x(h)$ est linéaire, on a bien F différentiable en x et $DF_x = f(x)Dg_x + g(x)Df_x$.

3. Découle des points 2 et 4, un peu technique si on passe par la définition...

4. Si $F = g \circ f$, alors

$$\begin{aligned} F(x+h) &= g(f(x+h)) = g(f(x) + Df_x(h) + o(h)) \\ &= g(f(x)) + Dg_{f(x)}(Df_x(h) + o(h)) + o(Df_x(h) + o(h)) \\ &= F(x) + Dg_{f(x_0)} \circ Df_x(h) + Dg_{f(x)}(o(h)) + o(h) \\ &= F(x) + Dg_{f(x_0)} \circ Df_x(h) + o(h), \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de $Dg_{f(x_0)}$,

$\|Df_x(h)\| \leq \|Df_x\| \|h\|$ car Df_x est linéaire continue, donc $o(Df_x(h) + o(h)) = o(h)$ et $Dg_{f(x)}(\|h\|\varepsilon(h)) = \|h\|Dg_{f(x)}(\varepsilon(h))$ par linéarité de $Dg_{f(x)}$ et si $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ alors par continuité et linéarité de $Dg_{f(x)}$, $\lim_{h \rightarrow 0} Dg_{f(x)}(\varepsilon(h)) = 0$ donc $Dg_{f(x)}(o(h)) = o(h)$.

Comme $h \mapsto Dg_{f(x)} \circ Df_x(h)$ est linéaire, on a bien F différentiable en x et $DF_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x$.

Exemple 32 1. $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $D(f_j)_x = f_j$.

En effet $f_j(x+h) = x_j + h_j = f_j(x) + f_j(h)$ donc $D(f_j)_x(h) = h_j = f_j(h)$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et

$$Df_x(h_1, h_2, h_3) = 2x_1x_2h_1 + (x_1^2 - 2x_3)h_2 - 2x_2h_3.$$

En effet

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x_1+h_1)^2(x_2+h_2) - 2(x_2+h_2)(x_3+h_3) \\ &= (x_1^2x_2 - 2x_2x_3) + (2x_1x_2h_1 + x_1^2h_2 - 2x_2h_3 - 2h_2x_3) \\ &\quad + (h_1^2x_2 + 2x_1h_1h_2 + h_1^2h_2 - 2h_2h_3) \\ &= f(x) + (2x_1x_2h_1 + x_1^2h_2 - 2x_2h_3 - 2h_2x_3) + o(h) \end{aligned}$$

et $h \mapsto 2x_1x_2h_1 + x_1^2h_2 - 2x_2h_3 - 2h_2x_3$ est linéaire.

Plus généralement, toute application polynomiale en les coordonnées est différentiable.

3. Les fonctions $f : U \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ dont les fonctions coordonnées f_j s'expriment comme des sommes, produits, quotients, composées de fonctions usuelles dérivables en les coordonnées sont différentiables.

Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\ln(x^2 + y^2), \sqrt{xy}e^{2y}) \end{aligned}$$

est différentiable sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Théorème 15 Soient E et F des evn et soit U un ouvert de E . Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable en $a \in U$ alors f est continue en a .

Démonstration

$$\|f(a+h) - f(a)\| = \|Df_a(h) + o(h)\| \leq \|Df_a\| \|h\| + \|o(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Définition 16 On dit que $f : U \subset E \rightarrow F$ est de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U et si l'application

$$Df : U \rightarrow (\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$$

$$x \mapsto Df_x$$

est continue.

Exemple 33 Si f est polynomiale en les coordonnées, alors f est de classe C^1 sur \mathbb{K}^n .

Proposition 27 Soit $\phi : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire continue.

Alors ϕ est de classe C^1 sur $E_1 \times E_2$ et $D\phi(x_1, x_2) : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ est définie par $D\phi(x_1, x_2)(h_1, h_2) = \phi(x_1, h_2) + \phi(h_1, x_2)$.

4.1.3 Dérivée directionnelle

Définition 17 Soient U un ouvert d'un evn E et $x_0 \in U$.

Soit h un vecteur non nul de E et $f : U \subset E \rightarrow F$ une application. On dit que f admet

une dérivée directionnelle selon le vecteur h au point x_0 si la fonction $t \mapsto f(x_0 + th)$ est dérivable en 0, i.e. si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \text{ existe.}$$

On note alors $\partial_h f(x_0) (\in F)$ cette limite.

Proposition 28 Soient U un ouvert de E et $x_0 \in U$. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable au point x_0 . Alors f admet une dérivée directionnelle en x_0 selon toute direction. Celle-ci est donnée par

$$\partial_h f(x_0) = Df_{x_0}(h).$$

Démonstration

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x + th) = f(x) + Df_x(th) + o(th) = f(x) + tDf_x(h) + o(th)$$

par linéarité de Df_x donc pour $t \neq 0$,

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = Df_x(h) + \frac{o(th)}{t} = Df_x(h) + o(h).$$

Exemple 34 • Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 = (0, 1, 1)$, alors f est différentiable sur \mathbb{R}^3 car polynomiale en les coefficients et $\partial_h f(x_0) = g'(0)$ avec $g(t) = f(th_1, 1 + th_2, 1 + th_3) = t^2 h_1^2 (1 + th_2) - 2(1 + th_2)(1 + th_3)$ donc $Df_{(0,1,1)}(h) = -2h_2 - 2h_3$.

• Si $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, alors f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ car chaque application f_j est polynomiale en les coefficients de la matrice et $Df_I(H) = \partial d_H f(I) = g'(0)$ où $g(t) = (I + tH)^3 = I + 3tH + 3t^2H^2 + t^3H^3$ donc $g'(t) = 3H + 6tH^2 + 3t^2H^3$ et $Df_I(H) = 3H$.

Attention! La réciproque est fautive!

Exemple 35 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

alors f n'est pas différentiable en 0 (elle n'y est pas même continue) alors que f admet une dérivée directionnelle dans toutes les directions.

En effet, un calcul donne pour $(h, k) \neq (0, 0)$ et $t \neq 0$

$$\frac{f(t(h, k)) - f(0, 0)}{t} = \frac{h^2 k}{t^2 h^4 + k} \rightarrow \begin{cases} h^2/k & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

mais $f(0, 0) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2)$.

Remarque 10 Si on sait que f est différentiable en x_0 , on a la formule

$$Df_{x_0}(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

Si on ne sait pas que f est différentiable en x_0 , on peut calculer cette limite $L_{x_0}(h)$.

Si elle n'existe pas, la fonction n'est pas différentiable en x_0 .

Si elle existe, pour montrer la différentiabilité de f en x_0 , on montre que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h) = o(h).$$

4.2 Applications définies sur \mathbb{R}^n

Dans cette partie, on se restreint au cas particulier $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^k$ (en général $k = 1$ et on s'intéresse aux applications d'un sous-ensemble de E dans F).

4.2.1 Dérivées partielles

Définition 18 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ avec U ouvert et soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subset U$. On définit pour $i \in [1, n]$ l'application partielle

$$g_i :]a_i - \epsilon, a_i + \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^k \\ t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

On appelle dérivée partielle de f au point a par rapport à x_i la dérivée de g_i au point a_i (lorsqu'elle existe). On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \partial_{x_i} f(a) := g'_i(a_i).$$

Remarque 11 Cela revient à fixer toutes les variables sauf la i -ème et à dériver suivant cette seule variable.

Lien avec la dérivée directionnelle : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée directionnelle de f en a suivant la direction du i -ème vecteur e_i de la base canonique, car

$$g'_i(a_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_i(a_i + t) - g_i(a_i)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \partial_{e_i} f(a).$$

Exemple 36 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 + \cos(x_2), e^{x_1 x_2})$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = (2a_1, a_2 e^{a_1 a_2}); \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = (-\sin(a_2), a_1 e^{a_1 a_2}).$$

Théorème 16 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application différentiable au point $a \in U$ avec U ouvert. Alors toutes les dérivées partielles de f en a existent et

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, Df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Démonstration

Soit e_i le i -ème vecteur de la base canonique. Si f est différentiable en a , alors d'après la proposition 28 et la remarque précédente

$$Df_a(e_i) = \partial_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Comme Df_a est linéaire, on a

$$Df_a(h) = Df_a\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i Df_a(e_i) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Exemple 37 Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 + \cos(x_2), e^{x_1 x_2})$, alors f est différentiable sur \mathbb{R}^2 en tant que composée de fonctions différentiables et

$$Df_x(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = h_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 e^{x_1 x_2} \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} -\sin(x_2) \\ x_1 e^{x_1 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -\sin(x_2) \\ x_2 e^{x_1 x_2} & x_1 e^{x_1 x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Attention! L'existence des dérivées partielles ne suffit pas à démontrer la différentiabilité.

Exemple 38 Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

alors f n'est pas différentiable en 0 (elle n'y est pas même continue) alors que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ par rapport à x et à y (elles sont nulles).

Théorème 17 Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application vérifiant

1. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe pour tout $i \in [1, n]$ et tout $x \in U$,
2. les fonctions $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sont continues sur U .

Alors f est différentiable sur U ,

$$Df_x(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

pour tout $x \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ et l'application $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$
 $x \mapsto Df_x$ est continue sur U , i.e. f est de classe C^1 sur U .

Démonstration dans le cas $n = 2, k = 1$ (le cas général est plus pénible à écrire).

Soit $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + h \in U$.

On a

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (f(a+h) - f(a+(h_1, 0))) + (f(a+(h_1, 0)) - f(a)) \\ &= f(a+h) - f(a+(h_1, 0)) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + h_1\varepsilon(h_1) \end{aligned}$$

avec $\lim_{h_1 \rightarrow 0} \varepsilon(h_1) = 0$.

Notons $\psi(t) = f(a_1 + h_1, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)t$. On a

$$\psi(h_2) - \psi(0) = f(a+h) - f(a+(h_1, 0)) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2$$

L'application ψ est de classe C^1 sur l'ouvert $] -r, r[$ si $r > 0$ est assez petit (car U est ouvert) et de dérivée $\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$. Par l'inégalité des accroissements finis

$$|\psi(h_2) - \psi(0)| \leq |h_2| \sup_{|t| \leq |h_2|} |\psi'(t)|.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ est continue en a donc $\lim_{h_2 \rightarrow 0} \sup_{|t| \leq |h_2|} |\psi'(t)| = 0$ et donc $|\psi(h_2) - \psi(0)| = o(|h_2|) = o(\|h\|)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \psi(h_2) - \psi(0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + h_1\varepsilon(h_1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Corollaire 8 Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application. Alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si

1. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe pour tout $i \in [1, n]$ et tout $x \in U$,
2. les fonctions $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sont continues sur U .

Exemple 39 L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est différentiable sur \mathbb{R}^2 et $Df_{(0,0)}(x, y) = 0$.

En effet, f admet pour dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

donc les dérivées partielles sont continues.

4.2.2 Matrice jacobienne

Dans tout ce paragraphe, U sera un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 19 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application différentiable en $a \in U$. La matrice jacobienne de f en a est la matrice de $Df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^k . On la note $Jf(a)$.

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$Df_a(h) = Jf(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^k.$$

Cas particuliers

— Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (i.e. $n = 1$) alors $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{pmatrix}$ et $Jf(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_k(t) \end{pmatrix}$,

$$Df_a(h) = \begin{pmatrix} f'_1(a)h \\ \vdots \\ f'_k(a)h \end{pmatrix} \text{ pour tous } a \in I \text{ et } h \in \mathbb{R}.$$

— Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $k = 1$) alors $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ et $Jf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$, $Df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ pour tous $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

Définition 20 (Vecteurs gradients) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Il existe un unique vecteur de \mathbb{R}^n noté $\nabla f(a)$, appelé vecteur gradient de f au point a , tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$Df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

On a

$$\nabla f(a) = {}^t Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple 40 1. Si $f(x, y) = x^2 - \sin(xy)$ alors $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \cos(xy) \\ -x \cos(xy) \end{pmatrix}$ et

$$Df_x(h) = (2x - y \cos(xy))h_1 - x \cos(xy)h_2.$$

2. Si $f(x, y) = (3x^2, \exp(xy))$ alors $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$ et $Df_x(h) = \begin{pmatrix} 6xh_1 \\ e^{xy}(yh_1 + xh_2) \end{pmatrix}$.

Proposition 29 Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , V un ouvert de \mathbb{R}^m , $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux applications et a un vecteur de U . Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors

$g \circ f$ est différentiable en a et $D(g \circ f)_a = Dg_{f(a)} \circ Df_a$ donc $J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a)$ (produit matriciel). En particulier

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Exemple 41 1. Si $h(x) = h(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$ alors

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(f(x)) \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x).$$

Par exemple si $h(x) = g(x_1 x_2, x_1 + x_2, x_1^2)$ et $g(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 y_3$, alors

$$\begin{aligned} Jh(x) &= Jg(f(x))Jf(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2 & x_1 + x_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(t) = f(1 - t, t^2)$, alors φ est dérivable et

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(1 - t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial x_2}(1 - t, t^2).$$

3. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(t) = f(t, t)$, alors φ est dérivable et

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, t).$$

4.2.3 Accroissements finis

Proposition 30 Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soient $x, y \in U$ tels que $[x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\} \subset U$. Alors

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1 - t)y), x - y \rangle dt.$$

Démonstration

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(tx + (1 - t)y) = f(y + t(x - y))$.

L'application φ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx + (1 - t)y) = \langle \nabla f(tx + (1 - t)y), x - y \rangle$$

donc

$$f(x) - f(y) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1 - t)y), x - y \rangle dt.$$

Théorème 18 (Inégalité des accroissements finis) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe (i.e. $\forall x, y \in U, [x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\} \subset U$).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Alors

$$\forall x, y \in U, |f(x) - f(y)| \leq \left(\sup_{z \in U} \|\nabla f(z)\|_2 \right) \|x - y\|_2.$$

L'application f est donc Lipschitzienne sur tout compact convexe de U .

Démonstration

D'après la proposition 30 et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire sur $C([0, 1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &= \left| \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - y \rangle dt \right| \\
 &\leq \int_0^1 |\langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - y \rangle| dt \\
 &\leq \int_0^1 \|\nabla f(tx + (1-t)y)\|_2 \|x - y\|_2 dt \\
 &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(tx + (1-t)y)\|_2 \|x - y\|_2 \\
 &= \sup_{z \in [x,y]} \|\nabla f(z)\|_2 \|x - y\|_2 \\
 &\leq \sup_{z \in U} \|\nabla f(z)\|_2 \|x - y\|_2.
 \end{aligned}$$

Corollaire 9 Si U est convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^1 sur U telle que Df_x est l'application nulle pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U .

Corollaire 10 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application de classe C^1 . Alors

$$\forall x, y \in U, |f(x) - f(y)| \leq n \left(\sup_{z \in U} \|Jf(z)\|_\infty \right) \|x - y\|_\infty.$$

Démonstration

On applique l'inégalité des accroissements finis à chaque fonction f_j , $j \in [1, k]$, puis l'inégalité $\|y\|_2 \leq \sqrt{n}\|y\|_\infty$ si $y \in \mathbb{R}^n$.

4.3 Dérivées d'ordre 2

4.3.1 Cas général, dérivées partielles secondes

On se limite dans ce paragraphe au cas $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Définition 21 On dit que f est de classe C^2 sur U lorsque f possède des dérivées partielles d'ordre 2 sur U et que toutes les dérivées sont continues, i.e. si

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ sont continues.}$$

On note $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Théorème 19 (de Schwarz) Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Alors

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration

Admise cette année, au programme de L^3 .

Exemple 42 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = xy + \cos(x + 2y)$, alors pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2 \sin(x + 2y)) = 1 - 2 \cos(x + 2y)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y - \sin(x + 2y)) = 1 - 2 \cos(x + 2y).$$

Attention : si les dérivées partielles secondes ne sont pas continues, c'est faux !

Exemple 43 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$,

alors pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^3} - 0 - 0 = 1$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 0.$$

4.3.2 Matrice Hessienne

On se limite dans ce paragraphe au cas $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1$).

Définition 22 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 . La matrice Hessienne de f au point $a \in U$ est la matrice

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in [1,n]^2} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 31 Si f est de classe C^2 sur U , alors la matrice Hessienne de f en tout point de U est symétrique (théorème de Schwarz).

Exemple 44 1. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = xy + \cos(x + 2y)$, alors pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y - \sin(x + 2y) \\ x - 2 \sin(x + 2y) \end{pmatrix}$$

et

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos(x + 2y) & 0 \\ 0 & x - 2 \sin(x + 2y) \end{pmatrix}$$

2. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$, alors

$$f(x) = {}^t xAx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

donc $\nabla f(x) = Ax + {}^t Ax$ car

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \sum_{i=1, i \neq k}^n a_{i,k} x_i + \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} x_j + 2a_{k,k} x_k \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,k} x_i + \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j. \end{aligned}$$

De plus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(x) = a_{\ell,k} + a_{k,\ell}$$

donc $Hf(x) = A + {}^t A$ qui est bien symétrique. Ici $Hh(x)$ ne dépend pas de x .

4.3.3 Formule de Taylor à l'ordre 2

Rappelons que si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur I , alors pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2).$$

On va généraliser cette formule à une fonction de plusieurs variables.

Théorème 20 Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U et soit $a \in U$. Alors il existe $r > 0$ et $\varepsilon: B(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et pour tout $h \in B(0, r)$

$$f(a+h) = f(a) + Df_a(h) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

i.e.

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(a)h, h \rangle + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

De plus, si f est de classe C^2 et si pour $a \in U$ fixé il existe $u \in \mathbb{R}^n$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que pour $h \in B(0, r)$,

$$f(a+h) = f(a) + \langle u, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Sh, h \rangle + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, alors $u = \nabla f(a)$ et $S = Hf(a)$.

On note aussi $D^2 f(a)$ la forme quadratique.

$$\begin{aligned} D^2 f(a): \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \langle Hf(a)h, h \rangle = {}^t hHf(a)h = \langle h, Hf(a)h \rangle \end{aligned}$$

Idée de démonstration

Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Soit $h \in B(a, r)$. On définit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(a + th)$. On a

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) = \langle \nabla f(a + th), h \rangle$$

et

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + th) = \langle h, Hf(a + th)h \rangle$$

donc $\varphi'(0) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ et $\varphi''(0) = \langle h, Hf(a)h \rangle$.

D'après la formule de Taylor-Young pour la fonction φ

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + o(t^2)$$

donc

$$\begin{aligned} f(a + th) &= f(a) + t\langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{t^2}{2}\langle h, Hf(a)h \rangle + o(t^2) \\ &= f(a) + \langle \nabla f(a), th \rangle + \frac{1}{2}\langle th, Hf(a)(th) \rangle + o(t^2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(a + h') = f(a) + \langle \nabla f(a), h' \rangle + \frac{1}{2}\langle h', Hf(a)h' \rangle + t^2\varepsilon_h(t)$$

Comme pour la formule de Taylor à l'ordre 1, il reste à montrer que le reste est bien négligeable devant $\|h'\|^2$.

Exemple 45 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$, alors

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \langle x + h, A(x + h) \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle + \langle h, Ah \rangle \\ &= f(x) + \langle Ax, h \rangle + \langle {}^t Ax, h \rangle + \frac{1}{2}(\langle h, Ah \rangle + \langle {}^t Ah, h \rangle) \\ &= f(x) + \langle (A + {}^t A)x, h \rangle + \frac{1}{2}\langle (A + {}^t A)h, h \rangle \end{aligned}$$

De plus $A + {}^t A$ est symétrique. On retrouve le résultat de l'exemple 44 : $\nabla f(x) = (A + {}^t A)x$ et $Hf(x) = A + {}^t A$.

Chapitre 5

Extrema

Dans tout ce chapitre, A est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et f une application de A dans \mathbb{R} . On cherche à déterminer les extrema éventuels de f sur A et les points (vecteurs de \mathbb{R}^n) de A où ils sont atteints.

5.1 Extrema locaux et globaux

Définition 23 Soit a un point de A .

- On dit que a est un point de minimum global de f sur A ou que f admet un minimum global en a si

$$f(a) = \min_{x \in A} f(x) \quad \text{i.e.} \quad \forall x \in A, f(a) \leq f(x).$$

- On dit que a est un point de minimum local de f sur A ou que f admet un minimum local en a si il existe un réel $r > 0$ tel que

$$f(a) = \min_{x \in A \cap B(a,r)} f(x) \quad \text{i.e.} \quad \forall x \in A \cap B(a,r), f(a) \leq f(x).$$

- On dit que a est un point de maximum global de f sur A ou que f admet un maximum global en a si

$$f(a) = \max_{x \in A} f(x) \quad \text{i.e.} \quad \forall x \in A, f(a) \geq f(x).$$

- On dit que a est un point de maximum local de f sur A ou que f admet un maximum local en a si il existe un réel $r > 0$ tel que

$$f(a) = \max_{x \in A \cap B(a,r)} f(x) \quad \text{i.e.} \quad \forall x \in A \cap B(a,r), f(a) \geq f(x).$$

Un extremum local ou global est un maximum ou un minimum local ou global. On dit que l'extremum est strict si les inégalités dans les définitions sont strictes pour $x \neq a$.

Exemple 46 Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, et $A = \overline{B_2}(0, 1)$ (boule unité fermée pour la norme euclidienne), alors f admet 0 pour minimum global au point $(0, 0)$ et 1 pour maximum global aux points du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Remarque 12 Rappelons que si K est compact et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes donc f admet un minimum et un maximum globaux sur K .

5.2 Points critiques : conditions d'ordre 1

Définition 24 Soit $a \in \overset{\circ}{A}$ et $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est différentiable en a , on dit que a est un point critique de f si $Df_a = 0$ (on rappelle que $Df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).

Théorème 21 (Condition nécessaire) Soit $a \in \overset{\circ}{A}$ et $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en a et si f est différentiable en a , alors $Df_a = 0$, i.e. a est un point critique de f .

Démonstration

Supposons que f admette un minimum local en a (sinon, on peut considérer $-f$). Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$ et pour tout $x \in B(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$.

Si $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $t \in \left] -\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|} \right[$, on a $a + th \in B(a, r)$ donc $f(a + th) \geq f(a)$ et donc

$$\frac{f(a + th) - f(a)}{t} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } t > 0 \\ \leq 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

L'application f est différentiable en a et $Df_a(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ donc $Df_a(h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. C'est encore vrai pour $h = 0$ par linéarité de Df_a .

Remarque 13 On cherchera les points critiques de f en utilisant

$$Df_a \equiv 0 \Leftrightarrow \nabla f(a) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1, n], \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Exemple 47 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4$, alors f est différentiable sur \mathbb{R}^2 car polynomiale. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x - 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

donc $(1, 0)$ est le seul point critique de f . Comme \mathbb{R}^2 est un ouvert, tous les points de \mathbb{R}^2 sont intérieurs donc si f admet des extrema locaux, c'est forcément en un point critique de f donc en $(1, 0)$. De plus

$$f(x, y) - f(1, 0) = x^2 + y^2 - 2x + 4 - 3 = (x - 1)^2 + y^2 \geq 0$$

donc f admet un minimum global en $(1, 0)$ et pas d'autre extremum (même local) sur \mathbb{R}^2 .

La réciproque est fautive !

Exemple 48 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4$, alors f est différentiable sur \mathbb{R}^2 car polynomiale. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x - 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

donc $(1, 0)$ est le seul point critique de f . Comme \mathbb{R}^2 est un ouvert, tous les points de \mathbb{R}^2 sont intérieurs donc si f admet des extrema locaux, c'est forcément en un point critique de f donc en $(1, 0)$. De plus

$$f(x, y) - f(1, 0) = x^2 - y^2 - 2x + 4 - 3 = (x - 1)^2 - y^2 \begin{cases} > 0 & \text{si } |x - 1| > |y| \\ < 0 & \text{si } |x - 1| < |y| \end{cases}$$

donc f n'admet aucun extremum (même local) sur \mathbb{R}^2 .

Un extremum peut être atteint en un point intérieur où la fonction n'est pas différentiable.

Exemple 49 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = |x - y|$, alors f admet un minimum global en $(0, 0)$ car $f(0, 0) = 0 \leq |x - y|$. f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ car $f(h, -h) = 2|h|$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, -h)}{h}$ n'existe pas.

Il peut exister des extrema sur ∂A qui ne sont pas des points critiques.

5.3 Conditions d'ordre 2

Dans ce paragraphe, on suppose que f est une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} de classe C^2 sur A .

5.3.1 Matrice Hessienne positive, définie positive

Soit $a \in \overset{\circ}{A}$. La matrice Hessienne de f en a est $Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Elle est symétrique, i.e. ${}^t Hf(a) = Hf(a)$, i.e. $Hf(a) \in S_n(\mathbb{R})$.

Définition 25 Une matrice M symétrique est

- positive si pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^t h M h \geq 0$;
- définie positive si pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a ${}^t h M h > 0$;
- négative si pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^t h M h \leq 0$;
- définie négative si pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a ${}^t h M h < 0$.

Dans la suite, on identifie \mathbb{R}^n et les matrices colonnes. On a alors ${}^t h M h = \langle h, M h \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n .

Rappelons que M , en tant que matrice symétrique réelle, est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres donc admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur multiplicité).

Proposition 32 Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors

- M est positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ;
- M est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives ;

dans ce dernier cas, si λ est la plus petite valeur propre de M alors

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \langle h, M h \rangle \geq \lambda \|h\|_2^2.$$

Démonstration

M est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres donc il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P \in O_n(\mathbb{R})$ (i.e. ${}^tP = P^{-1}$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$) tel que $M = P^{-1}DP$ et de plus $\|Px\|_2 = \|x\|_2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\langle h, Mh \rangle = {}^t h P^{-1} D P h = {}^t h {}^t P D P h = {}^t (Ph) D (Ph) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (Ph)_i^2 \geq \lambda \|Ph\|_2^2 = \lambda \|h\|_2^2$$

donc $\lambda \geq 0 \Rightarrow M$ positive et $\lambda > 0 \Rightarrow M$ définie positive.

Réciproquement, si e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i de M , on a en posant $h = P^{-1}e_i$,

$$\langle h, Mh \rangle = {}^t h P^{-1} D P h = {}^t ({}^t P e_i) P^{-1} D P P^{-1} e_i = {}^t e_i D e_i = e_i \lambda_i e_i = \lambda_i \|e_i\|_2^2$$

donc M positive $\Rightarrow \lambda_i \geq 0$ et M définie positive $\Rightarrow \lambda_i > 0$ pour tout $i \in [1, n]$.

5.3.2 Condition nécessaire

Théorème 22 Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur A et $a \in \overset{\circ}{A}$.

- Si f admet un minimum local en a , alors la matrice symétrique $Hf(a)$ est positive.
- Si f admet un maximum local en a , alors la matrice symétrique $Hf(a)$ est négative.

Dans les deux cas, a est un point critique de f .

Démonstration

On suppose que f admet un minimum local en a .

Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$ et pour tout $x \in B(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \left] -\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|} \right[$ (donc $f(a + th) - f(a) \geq 0$). D'après la formule de Taylor à l'ordre 2,

$$0 \leq f(a + th) - f(a) = Df_a(th) + \frac{1}{2} \langle Hf(a)th, th \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th).$$

On a vu que $Df(a) = 0$ donc $0 \leq \frac{t^2}{2} \langle Hf(a)h, h \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th)$ et $0 \leq \frac{1}{2} \langle Hf(a)h, h \rangle + \|h\|^2 \varepsilon(th)$. En faisant tendre t vers 0, on a $\langle Hf(a)h, h \rangle \geq 0$.

En appliquant cela à $-f$, on a la seconde assertion.

Exemple 50 1. Si $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4$, f admet un point critique et un minimum en $(1, 0)$ et $Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est bien une matrice positive.

2. Si $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4$, f admet un point critique en $(1, 0)$ et $Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est ni positive, ni négative et donc f n'admet pas d'extremum local en $(1, 0)$.

3. **La réciproque est fautive !** Si $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4}$, f admet un point critique en $(0, 0)$ et $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive mais f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$ car $f(x, 0) > 0$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) < 0$ si $y \neq 0$.

5.3.3 Condition suffisante

Théorème 23 Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur A et $a \in \overset{\circ}{A}$ un point critique de f .

- Si la matrice symétrique $Hf(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum local en a .
- Si la matrice symétrique $Hf(a)$ est définie négative, alors f admet un maximum local en a .

Dans les deux cas, il s'agit d'un extremum strict.

Démonstration

Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \left] -\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|} \right[$. D'après la formule de Taylor à l'ordre 2,

$$f(a + th) - f(a) = Df_a(th) + \frac{1}{2} \langle Hf(a)th, th \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th) = \frac{t^2}{2} \langle Hf(a)h, h \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th).$$

On a vu que $Df(a) = 0$. Soit $\lambda > 0$ la plus petite valeur propre de $Hf(a)$. On a donc $\langle Hf(a)h, h \rangle \geq \lambda \|h\|_2^2$.

Soit $r' < r$ tel que pour tout $u \in B(0, r')$, $|\varepsilon(u)| \leq \lambda/4$. On a alors pour $t \in \left] -\frac{r'}{\|h\|}, \frac{r'}{\|h\|} \right[$,

$$\begin{aligned} f(a + th) - f(a) &= \frac{1}{2} \langle Hf(a)th, th \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th) \\ &\geq t^2 \frac{\lambda \|h\|_2^2}{2} - t^2 \frac{\lambda}{4} \|h\|^2 \geq t^2 \frac{\lambda}{4} \|h\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi f admet un minimum local en a .

Pour le second point, on applique le premier à $-f$.

Ainsi si f est une application de classe C^2 au voisinage d'un point critique a intérieur à A , pour savoir si c'est un extremum, on calcule la matrice Hessienne en a et on détermine les signes des valeurs propres de $Hf(a)$.

- S'il existe deux valeurs propres de $Hf(a)$ de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en a .
- Si toutes les valeurs propres de $Hf(a)$ sont strictement positives, f admet un minimum strict en a .
- Si toutes les valeurs propres de $Hf(a)$ sont strictement négatives, f admet un maximum strict en a .
- Soit $Hf(a)$ admet 0 pour valeur propre, on ne sait pas conclure.

Exemple 51 Si $f(x, y, z) = x^3 + 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2z$, alors

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4x + 2y \\ 2y + 2x \\ 2z - 2 \end{pmatrix}$$

donc les points critiques de f sont $(0, 0, 1)$ et $(-2/3, 2/3, 1)$.

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x + 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3x + 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $Hf(0, 0, 1) = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Hf(-2/3, 2/3, 1) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme

$\det Hf(-2/3, 2/3, 1) < 0$, la matrice $Hf(-2/3, 2/3, 1)$ admet des valeurs propres de signes opposés et donc f n'admet pas d'extremum en $(-2/3, 2/3, 1)$.

La troisième valeur propre de $Hf(0,0,1)$ est strictement positive. Son déterminant aussi donc les valeurs propres de $Hf(0,0,1)$ sont ou bien toutes strictement positives, ou bien deux sont négatives et une positive. La somme des deux premières valeurs propres est la trace de $2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et est donc positive. Toutes les valeurs propres de $Hf(0,0,1)$ sont strictement positives et donc f admet un minimum strict en $(0,0,1)$.

Souvent il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres. Il suffit souvent d'utiliser que le déterminant est le produit des valeurs propres et la trace la somme des valeurs propres et d'isoler quelques valeurs propres.

5.3.4 Cas particulier : la dimension 2

Dans ce cas, on va voir que la trace et le déterminant suffisent à déterminer le signe des valeurs propres.

Soit $f \in C^2(\overset{\circ}{A}, \mathbb{R})$ avec $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$ un point critique de f . On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $Hf(a)$.

- Si $\det(Hf(a)) < 0$ alors $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ et donc f n'admet pas d'extremum local en a .
- Si $\det(Hf(a)) > 0$ alors $\lambda_1 \lambda_2 > 0$.
 - Si $\text{Tr}(Hf(a)) > 0$ alors les deux valeurs propres sont strictement positives et f admet un minimum local en a .
 - Si $\text{Tr}(Hf(a)) < 0$ alors les deux valeurs propres sont strictement négatives et f admet un maximum local en a .
- Si $\det(Hf(a)) = 0$ alors on ne peut rien dire.

Exemple 52 Si $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, alors

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x \end{pmatrix}$$

donc $(0,0)$ est le seul point critique de f . On a

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = Hf(0,0).$$

$\det(Hf(0,0)) = 3 > 0$ et $\text{Tr}(Hf(0,0)) = 4 > 0$ donc $(0,0)$ est un minimum local de f .

5.4 Exemple d'étude pratique

On cherche les maxima de la fonction $f(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$ sur $K = [-1, 1]^2$.

1. Existence

f est continue car polynomiale sur le compact K donc f est bornée sur K et y atteint ses bornes. f est différentiable (car polynomiale) sur $\overset{\circ}{K}$ donc f atteint son maximum sur le bord de K ou en un point critique intérieur.

2. Étude des points critiques

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x + 3y \\ 3x - 3y^2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2x + y \\ x - y^2 \end{pmatrix}$$

donc $(0, 0)$ et $(1/4, 1/2)$ sont les points critiques de f dans $\overset{\circ}{K}$ (ce sont bien des points de $\overset{\circ}{K}$). On a

$$Hf(x, y) = 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}.$$

$\det(Hf(0, 0)) < 0$ donc f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$.

$\det(Hf(1/4, 1/2)) > 0$ donc f admet un extremum en $(1/4, 1/2)$ et $\text{tr}(Hf(1/4, 1/2)) < 0$ donc c'est un maximum local.

On a $f(1/4, 1/2) = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

3. Étude de la frontière

La frontière de A est l'union de $A_1 = \{1\} \times [-1, 1]$, $A_2 = \{-1\} \times [-1, 1]$, $A_3 = [-1, 1] \times \{1\}$ et $A_4 = [-1, 1] \times \{-1\}$.

(a) Étude sur A_1

$f_1(y) = f(1, y) = 3y - 3 - y^3$, $f'_1(y) = 3 - 3y^2 > 0$ sur $] -1, 1[$ donc f_1 admet un maximum en 1 et donc le maximum de f sur A_1 est $f(1, 1) = f_1(1) = -1 < \frac{1}{16}$.

(b) Étude sur A_2

$f_2(y) = f(-1, y) = -3y - 3 - y^3$, $f'_2(y) = -3 - 3y^2 < 0$ sur $[-1, 1]$ donc f_2 admet un maximum en -1 et donc le maximum de f sur A_2 est $f(-1, -1) = f_2(-1) = 1 > \frac{1}{16}$.

(c) Étude sur A_3

$f_3(x) = f(x, 1) = 3x - 3x^2 - 1$, $f'_3(x) = 3 - 6x$ qui s'annule en $x = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$. f_3 admet un maximum en $1/2$ et donc le maximum de f sur A_3 est $f(1/2, 1) = f_3(1/2) = -1/4 < 1$.

(d) Étude sur A_4

$f_4(x) = f(x, -1) = -3x - 3x^2 + 1$, $f'_4(x) = -3 - 6x$ qui s'annule en $x = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$. f_4 admet un maximum en $-1/2$ et donc le maximum de f sur A_4 est $f(-1/2, -1) = f_4(-1/2) = 7/4 > 1$.

Finalement, f admet un maximum global sur K en $(-1/2, -1)$ qui vaut $7/4$.

5.5 Le cas des fonctions convexes

5.5.1 Définitions, rappels

Définition 26 Une partie C de \mathbb{R}^n est convexe si pour tous $x, y \in C$, le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$ est inclus dans C .

Soit C une partie convexe de \mathbb{R}^n .

Définition 27 Une application $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est

- convexe si pour tous $x, y \in C$, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$;
- strictement convexe si pour tous $x, y \in C$, $x \neq y$, pour tout $t \in]0, 1[$, $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$.

Rappel : Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est convexe ssi pour tous $x, y \in I$, $f(y) - f(x) \geq (y-x)f'(x)$.

Théorème 24 (caractérisation de la convexité dans le cas différentiable)

Soient C une partie convexe de \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. Si f est différentiable sur C , alors f est

- convexe si et seulement si pour tous $x, y \in C$, $f(y) \geq f(x) + Df_x(y - x)$;
- strictement convexe si et seulement si pour tous $x, y \in C$, $x \neq y$, $f(y) > f(x) + Df_x(y - x)$.

2. Si f est de classe C^2 sur C , alors f est

- convexe si et seulement si pour tout $x \in C$, $Hf(x)$ est positive ;
- strictement convexe si et seulement si pour tout $x \in C$, $Hf(x)$ est définie positive.

Démonstration

Commençons par un lemme.

Lemme 4 $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in C$, l'application $\varphi_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

$$t \mapsto f(tx + (1-t)y)$$

Démonstration du lemme

Soient $x, y \in C$.

Si $\varphi_{x,y}$ est convexe, alors

$$tf(x) + (1-t)f(y) = t\varphi_{x,y}(1) + (1-t)\varphi_{x,y}(0) \geq \varphi_{x,y}(t \cdot 1 + (1-t) \cdot 0) = \varphi_{x,y}(t) = f(tx + (1-t)y).$$

Si f est convexe, alors pour $t, s, \lambda \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{x,y}(\lambda t + (1-\lambda)s) &= f((\lambda t + (1-\lambda)s)x + (1 - (\lambda t + (1-\lambda)s))y) \\ &= f(\lambda(tx + (1-t)y) + (1-\lambda)(sx + (1-s)y)) \\ &\leq \lambda f(tx + (1-t)y) + (1-\lambda)f(sx + (1-s)y) \\ &\leq \lambda\varphi_{x,y}(t) + (1-\lambda)\varphi_{x,y}(s) \end{aligned}$$

donc $\varphi_{x,y}$ est convexe.

1. Montrons la première équivalence. Commençons par remarquer que pour tout $t \in [0, 1]$ et tous $x, y \in C$

$$\begin{aligned}\varphi'_{x,y}(t) &= Df_{tx+(1-t)y}(x-y) = \langle \nabla f(tx+(1-t)y), x-y \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx+(1-t)y)(x_j - y_j).\end{aligned}$$

- Si f est convexe, alors $\varphi_{x,y}$ est convexe donc $\varphi_{x,y}(0) \geq \varphi_{x,y}(1) + (0-1)\varphi'_{x,y}(1)$, i.e. $f(y) \geq f(x) + Df_x(y-x)$.
- Si $\varphi'_{x,y}(t) = Df_{tx+(1-t)y}(x-y)$ pour tous $x, y \in C$, alors pour tous $t, s \in [0, 1]$ et tous $x, y \in C$

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(s) &= f(sx + (1-s)y) \\ &\geq f(tx + (1-t)y) + Df_{tx+(1-t)y}((s-t)(x-y)) \\ &= \varphi_{x,y}(t) + (s-t)\varphi'_{x,y}(t).\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_{x,y}$ est convexe et donc f aussi.

Pour la stricte convexité, il suffit de remplacer les inégalités par des inégalités strictes.

2. Montrons la caractérisation à l'aide de la différentielle seconde. Comme

$$\varphi'_{x,y}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx+(1-t)y)(x_j - y_j)$$

on a

$$\begin{aligned}\varphi''_{x,y}(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx+(1-t)y)(x_j - y_j)(x_i - y_i) \\ &= \langle Hf(tx+(1-t)y)(x-y), x-y \rangle.\end{aligned}$$

- Si f est convexe, alors pour tous $y, y+h \in C$, $\varphi_{y+h,y}$ est convexe donc pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi''_{y+h,y}(t) \geq 0$ donc $\langle Hf(y+th)(th), th \rangle \geq 0$. En particulier, pour tous $z \in C$ et $h \in \mathbb{R}^n$, $\langle Hf(z)(h), h \rangle \geq 0$.
- Si pour tous $z \in C$ et $h \in \mathbb{R}^n$, $\langle Hf(z)(h), h \rangle \geq 0$, alors $\varphi''_{x,y}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tous $x, y \in C$ donc $\varphi_{x,y}$ est convexe et f aussi.

Exemple 53 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \alpha x^2 + \beta y^2$. L'application f est de
 classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}$ donc f est convexe si et seulement si $\alpha \geq 0$
 et $\beta \geq 0$, strictement convexe si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

5.5.2 Extrema des fonctions convexes

Théorème 25 Soient C un ouvert connexe et f une application convexe de classe C^1 sur C à valeurs réelles. Alors tout point critique de f est un point de minimum global de f sur C . Si f est strictement convexe, alors tout point critique de f est l'unique point de minimum global de f sur C .

1. Soit a un point critique de f . f est convexe et C^1 donc pour tout $x \in C$, $f(x) \geq f(a) + Df_a(x - a) = f(a)$ donc f admet un minimum global en a .
2. Si f est strictement convexe et $f(a) = f(b) = \min_C f$ avec $a \neq b$, alors

$$\min_C f \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) = \min_C f,$$

ce qui est absurde.

Exemple 54 Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle.$$

Alors f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^n , $\nabla f(x) = Ax + b$ et $Hf(x) = A$.

En effet :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle A(x+h), x+h \rangle + \langle b, x+h \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax + Ah, x+h \rangle + \langle b, x+h \rangle \\ &= f(x) + \frac{1}{2}\langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h \rangle + \langle b, h \rangle \\ &= f(x) + \langle Ax + b, h \rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h \rangle \end{aligned}$$

Comme A est définie positive, f est strictement convexe.

Comme A est inversible, f admet un point critique $a = -A^{-1}b$.

Ainsi a est l'unique point de minimum global de f sur \mathbb{R}^n .

Chapitre 6

Intégrales multiples

6.1 Notion de C^1 difféomorphisme

Définition 28 Soient U et V des ouverts de \mathbb{R}^n et φ une application de U dans V . On dit que φ est un C^1 difféomorphisme de U sur V si

1. φ est bijective de U sur V ;
2. φ et φ^{-1} sont de classe C^1 (sur U et V respectivement)

Remarque 14 Si φ est un C^1 difféomorphisme de U sur V , alors en différentiant l'égalité $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, on obtient pour tout $a \in U$ l'égalité matricielle

$$J(\varphi^{-1})(\varphi(a)) \cdot J\varphi(a) = I_n,$$

ce qui implique que pour tout $a \in U$, $J\varphi(a)$ est inversible donc $D\varphi_a$ aussi et de plus $(D\varphi_a)^{-1} = D(\varphi^{-1})_{\varphi(a)}$.

Le théorème d'inversion locale ci-dessous fournit une réciproque partielle de cette remarque.

Théorème 26 (inversion locale) Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur U , injective et si pour tout $x \in U$, $D\varphi_x$ est inversible (i.e. $\det(J\varphi(x)) \neq 0$), alors φ est un C^1 -difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

La démonstration sera faite en L3.

Exemple 55 1. *Coordonnées polaires.*

$\varphi : (\rho, \vartheta) \mapsto (r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))$ est un C^1 difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$.

En effet :

- φ est injective sur $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ car comme $\rho, \rho' > 0$ et $-\pi < \vartheta, \vartheta' < \pi$, on a

$$\varphi(\rho, \vartheta) = \varphi(\rho', \vartheta') \Leftrightarrow \rho e^{i\vartheta} = \rho' e^{i\vartheta'} \Leftrightarrow \rho = \rho' \text{ et } \vartheta \sim \vartheta' \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \rho = \rho' \text{ et } \vartheta = \vartheta'.$$

- $J\varphi(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\rho \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \rho \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ donc $\det(J\varphi(\rho, \vartheta)) = \rho > 0$.

- $\varphi(]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$.

Remarquons que $\varphi(]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ n'est pas un ouvert. De même $\varphi(]0, +\infty[\times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais φ n'est pas injective sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

2. *Coordonnées cylindriques.*

$\phi : (\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta), z)$ est un C^1 difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus P$ où P est le demi-plan d'équation $\{y = 0, x \geq 0\}$.

En effet :

- ϕ est injective sur $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ (mêmes arguments que pour φ)

- $J\phi(\rho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & r \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det(J\phi(r, \vartheta)) = r > 0$.

- $\varphi(]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus P$.

3. *Coordonnées sphériques.*

$\psi : (\rho, \vartheta, \varphi) \mapsto (\rho \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$ est un C^1 difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus P$ où P est le demi-plan d'équation $\{y = 0, x \geq 0\}$.

En effet :

- ψ est injective sur $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$.

- $J\psi(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ donc

$$\det(J\psi(\rho, \vartheta, \varphi)) = -\rho^2 \sin(\varphi) < 0.$$

- $\varphi(]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$.

Remarquons que $\varphi(]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ n'est pas un ouvert. De même $\varphi(]0, +\infty[\times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais φ n'est pas injective sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

6.2 Intégrales multiples : définitions

On cherche à généraliser la notion d'intégrale à des fonctions continues sur un compact de \mathbb{R}^n .

6.2.1 Intégrale sur un pavé de \mathbb{R}^n

Définition 29 On appelle pavé de \mathbb{R}^n tout ensemble P de la forme $P = \prod_{i=1}^n I_i$ où I_i est un intervalle borné de \mathbb{R} (donc $\bar{I}_i = [a_i, b_i]$ avec $a_i \leq b_i$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$).

On appelle volume de P le produit $\mu(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Définition 30 Si $P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ est un pavé fermé de \mathbb{R}^n et $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur P , on définit l'intégrale de f sur P par

$$\int_P f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 \right) dx_1.$$

Théorème 27 (Fubini sur un pavé de \mathbb{R}^n) Si $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur P , alors pour toute application bijective $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ on a

$$\int_P f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} \left(\int_{a_{\sigma(2)}}^{b_{\sigma(2)}} \cdots \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\sigma(n)} \cdots dx_{\sigma(2)} \right) dx_{\sigma(1)}.$$

Autrement dit, on peut intégrer dans l'ordre que l'on veut.
En particulier si $P \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy.$$

Exemple 56

$$\begin{aligned} \int_{[1,2] \times [0,2]} ye^{xy} d(x,y) &= \int_1^2 \int_0^2 ye^{xy} dy dx = \int_0^2 y \int_1^2 e^{xy} dx dy \\ &= \int_0^2 y \left[\frac{1}{y} e^{xy} \right]_1^2 dy = \int_0^2 (e^{2y} - e^y) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2y} - e^y \right]_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - e^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} (e^4 - 2e^2 + 1) \end{aligned}$$

Proposition 33 Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ avec $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

6.2.2 Intégrale double sur un ensemble délimité par des graphes de fonctions

Définition 31 Soit $[a,b]$ un segment de \mathbb{R} , u et v deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $u \leq v$ sur $[a,b]$. Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$ et si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur D , alors on définit l'intégrale de f sur D par

$$\int_D f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

Exemple 57 Soit D le triangle délimité par les axes et la droite d'équation $y = -2x + 2$, i.e

$$D = \{(x,y) \in [0, +\infty[^2 : y \leq -2x + 2\}.$$

Alors l'ensemble des valeurs prises par x lorsque (x,y) parcourt D est $[0,1]$ et lorsque $x \in [0,1]$ est fixé, $(x,y) \in D \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2 - 2x$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_D (2x+y)^2 d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} (2x+y)^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (2x+y)^3 \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{3} (2x)^3 \right) dx = \frac{8}{3} \int_0^1 (1-x^3) dx \\ &= \frac{8}{3} \left[x - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 2. \end{aligned}$$

Proposition 34 (Théorème de Fubini) Soit $[a,b]$ et $[c,d]$ des segments de \mathbb{R} , u et v deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $u \leq v$ sur $[a,b]$ et s et t deux fonctions continues sur $[c,d]$ telles que $s \leq t$ sur $[c,d]$. Si

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, s(y) \leq x \leq t(y)\}$$

et si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur D , alors on a

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{s(x)}^{t(x)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Autrement dit, on peut choisir l'ordre des variables par rapport auxquelles on intègre.

Exemple 58 On reprend l'exemple précédent. D est le triangle délimité par les axes et la droite d'équation $y = -2x + 2$, i.e

$$D = \{(x, y) \in [0, +\infty[^2 : y \leq -2x + 2\}.$$

Alors l'ensemble des valeurs prises par y lorsque (x, y) parcourt D est $[0, 2]$ et lorsque $y \in [0, 2]$ est fixé, $(x, y) \in D \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 - y/2$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_D (2x + y)^2 d(x, y) &= \int_0^2 \left(\int_0^{1-y/2} (2x + y)^2 dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{6} (2x + y)^3 \right]_0^{1-y/2} dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{6} (2^3 - y^3) dy = \frac{1}{6} \left[2^3 y - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^2 = \frac{1}{6} (2^4 - 2^2) = 2. \end{aligned}$$

Proposition 35 Si D_1 et D_2 sont des compacts de \mathbb{R}^2 de la forme introduite en définition 32 ou de la forme symétrique en inversant les rôles de x et y , si $D_1 \cap D_2 \subset \partial D_1 \cup \partial D_2$, alors on définit

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x, y) d(x, y) = \int_{D_1} f(x, y) d(x, y) + \int_{D_2} f(x, y) d(x, y).$$

Cette définition est compatible avec les définitions précédentes.

Remarque 15 Cela signifie que lorsque le compact D sur lequel on intègre a une forme compliquée, on peut le découper en plusieurs morceaux simples dont l'intersection est réduite à une courbe simple et l'intégrale sur le compact est définie comme la somme des intégrales sur les différents morceaux. On admet donc que la partie de l'intégrale sur la courbe ne compte pas.

Exemple 59 Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$, alors $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, -x - 1 \leq y \leq 1 + x\}.$$

$$\begin{aligned} \int_D e^{x+y} d(x, y) &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} e^{x+y} dy dx + \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{1+x} e^{x+y} dy dx \\ &= \int_0^1 e^x [e^y]_{x-1}^{1-x} dx + \int_{-1}^0 e^x [e^y]_{-x-1}^{1+x} dx \\ &= \int_0^1 e^x (e^{1-x} - e^{x-1}) dx + \int_{-1}^0 e^x (e^{x+1} - e^{-x-1}) dx \\ &= \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx + \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx \\ &= \left[ex - \frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} - e^{-1} x \right]_{-1}^0 \\ &= e - \frac{1}{2} (e - e^{-1}) + \frac{1}{2} (e - e^{-1}) - e^{-1} = e - e^{-1} \end{aligned}$$

6.2.3 Intégrale triple sur un ensemble délimité par des graphes de fonctions

Si F est une partie de \mathbb{R}^3 délimitée par une surface Σ et si f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} continue sur F , on calcule $\int_F f(x, y, z) d(x, y, z)$ dans les cas simple, i.e. lorsque le bord Σ de D est constitué de morceaux de surfaces définies par une équation de la forme $z = h(x, y)$.

Définition 32 Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , u et v deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $u \leq v$ sur $[a, b]$ et φ, ψ deux fonctions continues sur

$$D(u, v) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

telles que $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ pour $(x, y) \in D$. Si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(u, v) \text{ et } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur F , alors on définit l'intégrale de f sur F par

$$\int_F f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Exemple 60 Soit F le prisme délimité par les plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$, i.e

$$F = \{(x, y, z) \in [0, +\infty[^3 : z \leq 1 - x - y\}.$$

Alors l'ensemble des valeurs prises par x lorsque (x, y, z) parcourt F est $[0, 1]$ et lorsque $x \in [0, 1]$ est fixé, y parcourt $[0, 1 - x]$ et pour x, y fixés, $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 1 - x - y$. Le volume du prisme est

$$\begin{aligned} \int_F d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx \\ &= -\frac{1}{6} [(1-x)^3]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Comme pour les intégrales doubles, le théorème de Fubini permet d'affirmer que si l'on change le rôle joué par les variables x, y et z , on obtient la même valeur pour l'intégrale. De même si F_1 et F_2 vérifient $F_1 \cap F_2 \subset \partial F_1 \cup \partial F_2$, alors on définit l'intégrale sur $F = F_1 \cup F_2$ comme la somme des intégrales sur F_1 et sur F_2 .

6.2.4 Propriétés des intégrales multiples

Les intégrales multiples ainsi définies vérifient les mêmes propriétés que l'intégrale simple.

Proposition 36 Soit D, D' des domaines de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 , soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues sur D et D' . On notera $u = (x, y)$ si on est dans \mathbb{R}^2 et $u = (x, y, z)$ si on est dans \mathbb{R}^3 .

1. *Linéarité.* Si λ, μ sont des réels, alors

$$\int_D (\lambda f + \mu g)(u) du = \lambda \int_D f(u) du + \mu \int_D g(u) du.$$

2. *Positivité.* Si f est positive sur D , alors $\int_D f(u)du \geq 0$.

Si $f(u) \leq g(u)$ pour tous $u \in D$, alors $\int_D f(u)du \geq \int_D g(u)du$. En particulier

$$\left| \int_D f(u)du \right| \geq \int_D |f(u)|du.$$

3. *Croissance par rapport au domaine.* Si $D \subset D'$ et si f est continue et positive sur D' , alors

$$\int_D f(u)d(u) \geq \int_{D'} f(u)d(u).$$

Remarque 16 — Si $D \subset \mathbb{R}^2$, alors l'aire de D est

$$\mathcal{A}(D) = \int_D d(x, y)$$

et les coordonnées du centre de gravité G de D sont

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \int_D xd(x, y) \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \int_D yd(x, y).$$

— Si $D \subset \mathbb{R}^3$, alors le volume de D est

$$\mathcal{V}(D) = \int_D d(x, y, z)$$

et les coordonnées du centre de gravité G de D sont

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{V}(D)} \int_D xd(x, y, z) \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{V}(D)} \int_D yd(x, y, z) \quad \text{et} \quad z_G = \frac{1}{\mathcal{V}(D)} \int_D zd(x, y, z).$$

6.3 Changement de variables

6.3.1 Théorème de changement de variable

Théorème 28 Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) un compact limité par des courbes ou surfaces simples. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant K . Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 et $f : \varphi(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Si la restriction de φ à $\overset{\circ}{K}$ est un C^1 -difféomorphisme de $\overset{\circ}{K}$ sur $\varphi(\overset{\circ}{K})$, alors

$$\int_{\varphi(K)} f(v)dv = \int_K (f \circ \varphi)(u) |\det J\varphi(u)| du.$$

6.3.2 Exemples

1. Coordonnées polaires.

Calculons $\int_D (x-y)^2 dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq x \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Le compact $K = [0, 1] \times [0, \pi/4]$ est contenu dans \mathbb{R}^2 qui est ouvert. L'application

$\varphi : (\rho, \vartheta) \mapsto (r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et c'est un difféomorphisme

de $]0, 1[\times]0, \pi/4[= \overset{\circ}{K}$ sur $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < x \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$. De

plus $\det(J\varphi(\rho, \vartheta)) = \rho$ et $f : (x, y) \rightarrow (x - y)^2$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

On a donc

$$\begin{aligned} \int_D (x - y)^2 dx dy &= \int_{\varphi(K)} f(v) dv = \int_K (f \circ \varphi)(u) |\det J\varphi(u)| du \\ &= \int_{[0,1] \times [0, \pi/4]} f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta)) |\rho| d(\rho, \vartheta) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0, \pi/4]} \rho^3 (\cos(\vartheta) - \sin(\vartheta))^2 d\vartheta \right) d\rho \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - 2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)) d\vartheta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - \sin(2\vartheta)) d\vartheta \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} [\cos(2\vartheta)]_0^{\pi/4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

2. Coordonnées cylindriques.

Calculons $\int_D xyz dx dy dz$ avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

L'application $\varphi : (\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta), z)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 . Le compact $K = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq z\}$ est contenu dans l'ouvert \mathbb{R}^3 . L'application φ est un difféomorphisme de $\overset{\circ}{K}$ sur $\overset{\circ}{D}$ et $\det(J\varphi(\rho, \vartheta)) = \rho$. De plus, $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ est continue sur \mathbb{R}^3 . On a donc

$$\begin{aligned} \int_D (xyz) d(x, y, z) &= \int_{\varphi(K)} f(v) dv = \int_K (f \circ \varphi)(u) |\det J\varphi(u)| du \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,z]} \left(\int_{[0, \pi/2]} f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta), z) |\rho| d\vartheta \right) d\rho \right) dz \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,z]} \left(\int_{[0, \pi/2]} \rho^3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) z d\vartheta \right) d\rho \right) dz \\ &= \left(\int_{[0,1]} \left(z \int_{[0,z]} \rho^3 d\rho \right) dz \right) \left(\int_{[0, \pi/2]} \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) d\vartheta \right) \\ &= \left(\int_{[0,1]} \frac{z^5}{4} dz \right) \left[-\frac{1}{4} \cos(2\vartheta) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{24} \frac{1}{2} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

3. Coordonnées sphériques.

Calculons $\int_{\overline{B}(0,1)} (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z)$.

L'application $\psi : (\rho, \vartheta, \varphi) \mapsto (\rho \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$ est de classe C^1 de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R}^3 et $\det(J\psi(\rho, \vartheta, \varphi)) = -\rho^2 \sin(\varphi)$.

Si $K = \{(\rho, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 1\}$, alors K est compact et ψ est un C^1 -difféomorphisme de $\overset{\circ}{K}$ sur $\overset{\circ}{\psi(K)}$ et $\psi(K) = \overline{B}(0, 1)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}(0,1)} (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z) &= \int_K \rho^2 |-\rho^2 \sin(\varphi)| d(\rho, \vartheta, \varphi) \\ &= \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) 2\pi \left(\int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi \right) = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$