Analyse 3 - TD 6
C^1-difféomorphisme, intégrales multiples

I. C^1-difféomorphisme, changement de variable.

1. **Équation des ondes.**
   En utilisant le changement de variable linéaire $u = t + x$ et $v = t - x$, trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant
$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x).$$

2. (a) Vérifier que l'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & D \\ & (x,y) & \longmapsto & (u = xy,\ v = \frac{x}{y}) \end{array}$$
   est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de classe C^2.

   (b) Transformer l'équation aux dérivées partielles
$$\forall (x,y) \in D, \qquad x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$
   à l'aide du changement de variables φ.

   (c) En déduire toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ vérifiant cette équation.

II. Théorème de Fubini.

1. Vérifier le théorème de Fubini en intégrant de deux façons les fonctions continues suivantes sur les pavés donnés.
   (a) $f(x,y) = \frac{y}{1+x}$ sur $P = [0,1] \times [0,1]$
   (b) $f(x,y) = 1 + xe^y$ sur $P = [2,3] \times [0,1]$
   (c) $f(x,y) = \cos(x+2y)$ sur $P = [0,1] \times [1,2]$

2. Calculer l'intégrale double
$$\iint_\Omega (x^2 + y)\, dxdy$$
   où Ω est le domaine défini par
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le y \le 1, \quad y \ge x, \quad y \ge -x\}.$$

3. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\Omega} \cos(x+1)\, dxdy$$

où Ω est le domaine défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y \leq |x|, \quad y \geq -1\}.$$

4. (a) Calculer l'aire du domaine Ω défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq \frac{1}{2}, \quad y \geq x^2, \quad xy \leq 1\}.$$

(b) Calculer ensuite $\iint_{\Omega} x^2 y\, dxdy$

5. Soit $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 \leqslant y \leqslant 1 + \frac{x^2}{2}\}$. Calculer

$$I := \iint_{\Omega} (x^2 + x + 3)\, dxdy$$

6. Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_{D} xy\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

dans les deux cas suivants :

(a) D est défini par $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$.

(b) D est défini par $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Dans le deuxième cas, on vérifiera la formule de Fubini i.e. qu'intégrer suivant la variable x puis y donne le même résultat que si on intégre d'abord suivant la variable y puis x. [1]

7. Calculer l'intégrale

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2\, dxdydz$$

où Ω est délimité par les plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.

III. Changement de variables.

1. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y)\, dxdy$$

où Ω est le domaine défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq x, \quad y \geq -x\}.$$

2. Soit D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

(a) Calculer (directement) $I := \displaystyle\iint_{D} (x-y)\, dxdy$.

---

1. Résultat du (b). : $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{30\sqrt{2}}$.

(b) Calculer I au moyen du changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

3. Calculer l'intégrale double
$$\iint_\Omega \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$
où Ω est le domaine défini par
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < y < \sqrt{3}\, x, \quad 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

4. Calculer l'intégrale double
$$\iint_\Omega \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$
où Ω est le domaine défini par
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq x^2 + y^2\}.$$

5. Calculer l'intégrale double
$$\iint_\Omega \frac{x}{y}\, dxdy$$
où Ω est le domaine défini par
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad |y| \geq |x|\}.$$

6. (a) Calculer l'aire du domaine Ω défini par
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(b) Calculer ensuite $\iint_\Omega (x + y + z)^2\, dxdydz$.

7. Calculer l'intégrale triple
$$\iiint_\Omega z \cos(x^2 + y^2)\, dxdydz$$
où Ω est le domaine défini par
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$
On pourra passer en coordonnées sphériques.