Licence de Mathématiques L2 Université de Lorraine
2023-2024

Analyse 3 - TD 5
Différentielle seconde et étude d'extrema

1. Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

L'application f est-elle de classe C^1 ? Est-elle de classe C^2 ?

2. Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y(x^2-y^3)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

L'application f est-elle de classe C^2 ?

3. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, que l'on identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$. On considère l'application suivante

$$\begin{array}{rccl} f: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \operatorname{tr}({}^tAA). \end{array}$$

   (a) Dire brièvement pourquoi f est de classe C^2.
   (b) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, déterminer Df_A. Calculer également $Hf(A)$.

4. Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions définies en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :

   (a) $x^3 + y^3 - 3xy$.
   (b) $x^4 + y^4 - 4xy$.
   (c) $x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.
   (d) $2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.
   (e) $x^4 + y^3 - 3y - 2$.
   (f) $(x^2 + y^2)e^{x^2-y^2}$.

5. Étudier les extrema des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définies en (x, y, z) par
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.
   (b) $x^3 + 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2z$.
   (c) $x^3 + 3xy^2 + 3z^2 + 3xy$.

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + y$, et considérons

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\ ,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

   (a) Étudier les extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Dessiner A, et montrer que A est un compact.
   (c) Montrer que A n'est pas convexe.
   (d) Est-ce que $f|_A$ admet des extrema globaux ?
   (e) Calculer les extrema globaux et locaux de $f|_A$.

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \exp(xy)$.
   (a) Montrer que f est de classe C^2.
   (b) Calculer le gradient et la hessienne de f.
   (c) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(1, 2)$.

8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + 3 + 6x$.
   (a) Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point.
   (b) En déduire que f est une fonction convexe.
   (c) Trouver l'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$.

9. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $g = f^2$. Déterminer Hg en fonction de f, ∇f et Hf.

10. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ où

$$u(x, y) = x + f(y) \text{ et } v(x, y) = y + f(x),$$

   avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ vérifiant $|f'(t)| \leq k < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que φ est surjective. Pour cela, on établira que pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction

$$\psi(x, y) = (\xi - u(x, y))^2 + (\eta - v(x, y))^2$$

   admet un minimum en un point (x_1, y_1) tel que $\varphi(x_1, y_1) = (\xi, \eta)$.
   (b) Montrer que φ est bijective.