# Analyse 3 - TD 4
# Différentiabilité, applications $C^1$

## 1 Autour de la définition

1. (a) Soit $L$ une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $L$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer sa différentielle et ses $m$ dérivées partielles.
   (b) Montrer que toute application bilinéaire $B$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

2. Soit $E$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que l'application $x \mapsto \langle x, x \rangle$ est différentiable en tout point de $E$ et calculer sa différentielle.

3. Soit $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, on ait
$$|H(y) - H(x)| \leq \|y - x\|^2.$$
Démontrer que $H$ est constante sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé.
   (a) Montrer que $x \mapsto N(x)^2$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
   (b) Montrer que $x \mapsto N(x)$ n'est pas différentiable en 0.

5. (a) Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels. Montrer que les application suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles.
$$H_1 : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & Tr(A) \end{array} \qquad H_2 : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2. \end{array}$$
$$H_3 : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & (TrA)^3. \end{array} \qquad H_4 : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^3, \end{array}$$
$$H_5 : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB^2. \end{array}$$

6. On considère l'espace vectoriel normé $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$. Calculer la différentielle en $(e_1, \cdots, e_n)$ de l'application déterminant, i.e., l'application
$$\det : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, v_2, \ldots, v_n) & \longmapsto & \det(v_1, v_2, \ldots, v_n). \end{array}$$

## 2 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$.

7. Soit $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2+1)$ et $h(t) = f(\cos t, e^{2t})$. Démontrer que $g$ et $h$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(t)$ et $h'(t)$ en fonction des dérivées partielles de $f$. Vérifier que la formule est exacte avec $f(x,y) = x\ln(y)$.

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles de $f$ dans l'ouvert $\{(x,y) \ : \ y \neq 0\}$
   (c) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ existe pour tout réel $x$ et la calculer.
   (d) En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (e) Justifier de façon simple le fait que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   (f) Pour $x \neq 0$, étudier la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sin(xh)}{h} - x\right).$$

   (g) En déduire que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (h) Conclure que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

9. Déterminer si les applications suivantes sont différentiables à l'origine.

$$\begin{array}{llll} G_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & G_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} G_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & G_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} G_3 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & G_3(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} G_4 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & G_4(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

10. Montrer que les applications suivantes sont différentiables sur leur ensemble de définition et déterminer lesquelles y sont de classe $C^1$.

$$\begin{array}{llll} F_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & F_1(x,y,z) = \begin{cases} xyz\ln(x^2+y^2+z^2) & \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases} \\ F_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & F_2(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \\ F_3 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & F_3(x,y) = \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si} \quad x+y \geq 0, \\ \operatorname{ch}(x+y) & \text{si} \quad x+y < 0. \end{cases} \end{array}$$

11. On définit les applications $F$ et $G$ suivantes :

$$\begin{array}{llll} F : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x_1,x_2) & \longmapsto & F(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, x_1, x_2^2, x_1x_2^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} G : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (y_1,y_2,y_3,y_4) & \longmapsto & F(y_1,y_2,y_3,y_4) = (y_1^2 - y_2^2, y_2y_3 - y_4, y_1 - 1) \end{array}$$

Calculer la matrice jacobienne de $G \circ F$.

12. Pour les fonctions $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (u(x,y), v(x,y)) \end{array}$ ci-dessous, calculer la jacobienne de $f$ et vérifier que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \Delta u = \Delta v = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$(a) \quad f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) \quad (b) \quad f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin(y)).$$

# 3 Accroissements finis, fonctions Lipschitziennes

13. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $U$ un ouvert convexe de $E$. On suppose que $H : U \mapsto F$ est une application différentiable telle qu'il existe une application linéaire $L$ de $E$ dans $F$ vérifiant, pour tout $x \in U$, $DH(x) = L$. Déterminer $H$.

14. Soit $K$ un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la restriction de $H$ à $K$ est lipschitzienne.

15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $H : E \mapsto E$ une application différentiable vérifiant : $\exists k \in ]0,1[$, tel que $\forall x \in E$, $\|DH(x)\| \leq k$.
    (a) Montrer que l'application $G := Id_E + H$ est injective.
    (b) Montrer que pour toute partie bornée $B$ de $E$, la partie $G^{-1}(B)$ est une partie bornée de $E$.