Analyse 3 - TD 2
Suites, applications continues, compacité

1 Suites

1. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'adhérence de l'ensemble $U = \{u_n,\, n \geq 1\}$ où $(u_n)_{n\geq 1}$ est donnée par

$$u_n := \left((-1)^n + \frac{1}{n},\ \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right).$$

Pour chaque $a \in \overline{U} \setminus U$, donner une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers a.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer A^3 en fonction de A. En déduire A^n en fonction de A et n.
   (b) La suite $(A^n)_n$ a-t-elle une limite dans $M_3(\mathbb{R})$ muni de la norme infinie ?

3. On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{in+i+1}{(i-1)n+1}$. Vérifier que le résultat est bien le rapport des termes de plus haut degré.

4. Dans l'espace vectoriel E des polynômes, on pose si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,

$$N_1(P) = |a_0 + P'(1)| + \sum_{k=1}^{n} |a_k| \text{ et } N_2(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

   (a) Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur E.
   (b) Soit la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de E définie par $P_n(x) = 1 - \frac{x^n}{n}$. Montrer que cette suite converge vers le polynôme nul pour N_1 et vers le polynôme 1 pour N_2.
   (c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

2 Continuité

1. Considérons deux espaces vectoriels réels E et F, A une partie de E, a un élément de A et $f : A \mapsto F$ une application. Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et N_1' et N_2' deux normes équivalentes sur F. Montrer l'équivalence suivante :
f est continue en a pour les normes $N_1, N_1' \iff f$ est continue en x_0 pour N_2, N_2'.

2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer la continuité de l'application

$$\begin{array}{rccc} N\colon & (E,N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |.|) \\ & x & \longmapsto & N(x). \end{array}$$

3. Étudier la continuité des applications définies ci-dessous :

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} G: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & G(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & H(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & J(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} K: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & K(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & L(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} M: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & M(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)xy+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} N: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & N(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ x & \text{si} \quad y = 0. \end{cases} \end{array}$$

4. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0 \text{ ou } (x-1)^2 + y^2 < 1\}$$

et l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$

Montrer que f est continue sur toute droite passant par 0 mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

5. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{4} \sin(x + y), 1 + \frac{2}{3} \text{Arctan}\,(x - y) \right),$$

est lipschitzienne sur $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$.

6. On considère l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes).
   (a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonales est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

7. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$.
   (a) Dire lesquelles des applications suivantes sont des normes sur E :

$$N_1(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad ; \quad N_2(f) = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \quad ; \quad N_3(f) = |f(0)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

   (b) On considère $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = (f'(\frac{1}{2}))^2$. Montrer que φ est continue lorsque l'on munit E de la norme N_3 mais qu'elle ne l'est pas si E est muni de la norme N_1.

8. Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$. On rappelle que les applications suivantes sont des normes sur E :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(x)| \, dx \quad ; \quad N_\infty(f) = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad ; \quad N_2(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_a^b f(x) \, dx$. Montrer que φ est Lipschitzienne pour chacune des normes ci dessus.

9. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}, \\ E_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^5 = 1\}, \\ E_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 1\}, \\ E_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + y^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

10. L'image réciproque d'un compact par une application continue est-elle un compact ?

11. Dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$, trouver une suite $(f_n)_n$ de la boule unité fermée qui n'admette pas de sous-suite convergente.