

Feuille TD 04 - Calcul des primitives

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes, puis déterminer leurs primitives.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $x \mapsto x^3 - 5x^2 - 3x$; | b) $x \mapsto 3x^{100}$; | c) $x \mapsto \frac{2}{4-3x}$; |
| d) $x \mapsto (2x+1)^3$; | e) $x \mapsto (1-2x)^5$; | f) $x \mapsto (3x+2)^{-5}$; |
| g) $x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)}$; | h) $x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$; | i) $x \mapsto \sin(5x-2)$; |
| j) $x \mapsto \sin^2(x)$; | k) $x \mapsto \cos^2(x)$; | l) $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$; |
| m) $x \mapsto \sin(x)\cos^3(x)$; | n) $x \mapsto \frac{\ln x }{x}$; | o) $x \mapsto \frac{\ln^3 x }{x}$; |
| p) $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; | q) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$; | r) $x \mapsto \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$; |
| s) $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$; | t) $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$; | u) $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+4x+3}$; |
| v) $x \mapsto 2xe^{x^2}$; | w) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; | x) $x \mapsto e^{3x+1}$; |

Exercice 2. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes, puis déterminer leurs primitives.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $x \mapsto -\frac{e^{1/x}}{x^2}$; | b) $x \mapsto \cos(x)e^{\sin(x)}$; | c) $x \mapsto \sin(3x + \frac{\pi}{2})$; |
| d) $x \mapsto \frac{2x^2+3x+5}{x}$; | e) $x \mapsto \frac{\ln^2 x }{x}$; | f) $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$; |
| g) $x \mapsto \frac{1}{e^{2x}}$; | h) $x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2}$; | i) $x \mapsto \sin(x)e^{\cos(x)}$; |
| j) $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; | k) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$; | l) $x \mapsto \frac{1}{2x\sqrt{\ln x }}$; |
| m) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; | n) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$; | o) $x \mapsto \frac{1}{x\ln x }$; |
| p) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$; | q) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)^3}$; | r) $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2 x }$; |

Exercice 3 (forme $\alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ avec α réel). Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $x \mapsto \sqrt{x}$; | b) $x \mapsto x\sqrt{x}$; | c) $x \mapsto \sqrt{x+1}$; |
| d) $x \mapsto \sqrt{3x+2}$; | e) $x \mapsto (x+1)\sqrt{x+1}$; | f) $x \mapsto (2x+3)\sqrt{2x+3}$; |
| g) $x \mapsto x^3\sqrt{x}$; | h) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$; | i) $x \mapsto x^2\sqrt[3]{x}$; |
| j) $x \mapsto (x+1)\sqrt{2x+3}$; | | |

Exercice 4. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|---|---|---------------------------------------|
| a) $x \mapsto \sin(x)\sin(\cos(x))$; | b) $x \mapsto e^x \cos(e^x)$; | c) $x \mapsto \cos(x)\cos(\sin(x))$; |
| d) $x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$; | e) $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}$; | |

Exercice 5. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| a) $x \mapsto \tan(2x)$; | b) $x \mapsto \tan(3x+7)$; | c) $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$; |
| d) $x \mapsto \tan^2(x)$; | e) $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)^2}$; | f) $x \mapsto \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$; |
| g) $x \mapsto \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$; | h) $x \mapsto \frac{\tan^3(x)}{\cos^2(x)}$; | i) $x \mapsto \frac{1}{\tan(x)\cos^2(x)}$; |
| j) $x \mapsto \frac{1}{(\tan(x)\cos(x))^2}$; | | |

Exercice 6. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $x \mapsto xe^x$; | b) $x \mapsto x\sin(x)$; | c) $x \mapsto \ln(x)$; |
| d) $x \mapsto x\ln(x)$; | e) $x \mapsto x^2\ln(x)$; | f) $x \mapsto \ln^2(x)$; |
| g) $x \mapsto \ln^3(x)$; | h) $x \mapsto x^2e^x$; | i) $x \mapsto x^2e^{-x}$; |
| j) $x \mapsto x^2\cos(x)$; | k) $x \mapsto x^3e^{x^2}$; | l) $x \mapsto e^x\sin(x)$; |
| m) $x \mapsto xe^x\cos(x)$; | n) $x \mapsto x^2e^x\cos(x)$; | o) $x \mapsto e^{3x}\cos(2x)$; |
| p) $x \mapsto \sin(x)\ln(\cos(x))$; | q) $x \mapsto x^3e^{-x^2}$; | r) $x \mapsto x^3\cos(x^2)$; |
| s) $x \mapsto 2x(x^2+1)e^{x^2}$; | | |

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_0^{2\pi} \cos(x)dx$; b) $\int_0^{2\pi} |\cos(x)|dx$;
 c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx$; d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$;
 e) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$ f) $\int_0^2 (1 - |x - 1|)^3 dx$;

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x)dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cos(x)dx$;

Exercice 9. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- a) $x \mapsto \cos^3(x)$; b) $x \mapsto \sin^3(x)$; c) $x \mapsto \sin^4(x)$;
 d) $x \mapsto \cos^5(x)$; e) $x \mapsto \sin^2(x) \cos^3(x)$; f) $x \mapsto \cos(3x) \cos^3(x)$

Exercice 10. Soient $I = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2(x)dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2(x)dx$.

- Calculer $I + J$.
- Calculer $I - J$, par exemple en intégrant par parties.
- En déduire I et J .

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- Calculer I_1 et I_2 en intégrant par parties.
- En intégrant par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1} .
- En déduire I_5 .

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin(x)dx$.

- Calculer I_n en intégrant par parties deux fois.
- Démontrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser le premier terme et la raison.

Exercice 13. Soit $I = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} e^x \cos(x)dx$. En intégrant par parties deux fois, trouver une équation dont I est solution. En déduire I .

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-x}}{1-x}$. Le but de cet exercice est de calculer une valeur approchée de

$$I = \int_0^{1/2} f(x)dx$$

sans calculer une primitive de f .

- Étudier les variations de f et en déduire :

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

- Démontrer que pour tout $x \in [0, 1/2]$, on a $\frac{1}{1-x} = 1+x + \frac{x^2}{1-x}$ et en déduire que

$$I = \int_0^{1/2} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx.$$

- Calculer $J = \int_0^{1/2} (1+x)e^{-x}dx$.
- Déduire de la première question que

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

- Expliquer comment en déduire une valeur approchée de I à 10^{-2} près. (Vérifier avec une calculatrice si disponible.)

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 e^{-x^2/n} dx$. Ceci définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad e^{-1/n} \leq e^{-x^2/n} \leq 1.$$

- En déduire par un encadrement que la suite (u_n) admet une limite que l'on calculera.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x+2)e^{-x}$.

- Étudier f .
- Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité : 2 cm). Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer l'aire \mathcal{A}_m en cm^2 du domaine limité par \mathcal{C} , les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = m$.
- Quelle est la limite de \mathcal{A}_m lorsque m tend vers $+\infty$?