THÉORIE SPECTRALE

EXAMEN – MASTER 2 RECHERCHE

Durée : 2 heures
Documents autorisés

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et soit $U \in L(H)$ un opérateur unitaire, i.e. un endomorphisme $U : H \to H$ tel que

$$U^*U = UU^* = \mathrm{Id}\,.$$

Le but de cet exercice est de redémontrer l'existence d'une mesure spectrale avec une autre méthode que celle du cours. Pour une fonction $[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta})$ qui est dans $L^1([-\pi, \pi])$, on note

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t$$

ses coefficients de Fourier, et on note $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions $[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta})$ qui sont dans $L^1([-\pi, \pi])$ et telles que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty.$$

1. Pour $f \in \mathcal{A}$, on pose

$$f(U) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f) U^k.$$

Montrer que la série de droite converge et que cette série définit une application linéaire continue $f(U) \in L(H)$ de norme

$$\|f(U)\| \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k(f)|.$$

Vérifier que pour tout polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbf{C}[u]$, on a

$$P(U) = \sum_{k=0}^{n} c_k U^k.$$

2. Montrer de plus que lorsque $f \in C^2_{\text{per}}(\mathbf{R})$ est une fonction périodique de période 2π de classe C^2 alors [1]

$$|\langle f(U)u, u\rangle| \le \left(\sup|f| + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\sup|f''|\right)\|u\|^2.$$

3. Montrer que pour tous $f, g \in \mathcal{A}$

$$f(U)^* = \bar{f}(U), \quad (fg)(U) = f(U)g(U).$$

4. Soit $f \in \mathcal{A}$, montrer que

$$f(U) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)U^k.$$

5. Soit $V \in L(H)$ un opérateur unitaire. On considère

$$\sigma_n(V) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)V^k$$

ainsi que le polynôme trigonométrique

$$Q_n(\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{\mathrm{e}^{in\theta} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}.$$

   (a) Montrer que $\sigma_n(V)$ est autoadjoint.

   (b) Montrer que

$$\langle \sigma_n(V)u, u\rangle = \frac{1}{n}\|Q_n(V)u\|^2.$$

   En déduire que $\sigma_n(V)$ est positif.

   (c) En déduire que lorsque 1 n'est pas dans le spectre de V

$$\langle \sigma_n(V)u, u\rangle = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. Soit $f \in \mathcal{A}$, montrer la formule

$$\langle f(U)u, u\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta})\langle \sigma_n(\mathrm{e}^{-i\theta}U)u, u\rangle\,\mathrm{d}\theta.$$

7. Déduire des questions 5 et 6 que si f est à valeurs positives alors $\langle f(U)u, u\rangle \ge 0$, puis que $f \mapsto \langle f(U)u, u\rangle$ est donnée par une mesure borélienne positive $\mu_{u,u}$

$$\langle f(U)u, u\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} f(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\mu_{u,u}(\theta).$$

---

1. Ce qui prouve que $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}) \ni f \to \langle f(U)u, u\rangle$ est une distribution.

8. Déduire des questions 5 et 6 que lorsque le support de la fonction $\theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta})$ est dans un voisinage suffisamment petit de $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ tel que $\mathrm{e}^{i\theta_0} \notin \sigma(U)$ alors
$$\langle f(U)u, u\rangle = 0.$$
9. Quelles sont les propriétés de la mesure $\mu_{u,u}$?
10. *Un exemple :* Soit $H = \ell^2(\mathbf{Z})$ et U l'opérateur de décalage
$$U(c_n)_{n\in\mathbf{Z}} = (c_{n+1})_{n\in\mathbf{Z}}.$$
    (a) Montrer que U est unitaire.
    (b) Déterminer $\sigma_{\mathrm{p}}(U)$.
    (c) On considère l'isométrie
$$\begin{aligned} \Phi : H &\to L^2([-\pi, \pi]) \\ c = (c_n)_{n\in\mathbf{Z}} &\mapsto u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n \mathrm{e}^{in\theta} \end{aligned}$$
    où $L^2([-\pi, \pi])$ est muni du produit scalaire
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\overline{v(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$
    Calculer $\Phi U \Phi^{-1}$.
    (d) En déduire une formule pour la mesure spectrale $\mu_{c,c}$.

Exercice 2. Soit $(A, D(A))$ un opérateur autoadjoint. Il s'agit dans cet exercice de donner une caractérisation alternative de son spectre. On note
$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(A) = \big\{\lambda \in \mathbf{R} : \exists (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ suite de } D(A) \\ \text{telle que } \forall n \in \mathbf{N}\ \|u_n\| = 1 \text{ et } \lim (A-\lambda)u_n = 0\big\}. \end{aligned}$$
On veut montrer que $\sigma(A) = \tilde{\sigma}(A)$.
1. Montrer que $\mathbf{R} \setminus \sigma(A) \subset \mathbf{R} \setminus \tilde{\sigma}(A)$.
2. Montrer que $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \tilde{\sigma}(A)$.
3. Soit $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$.
    (a) Supposons que $v = \lim(A-\lambda)u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée. de $D(A)$. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge faiblement vers un $u \in H$, c'est-à-dire que pour tout $w \in H$
$$\lim \langle u_{\varphi(n)}, w\rangle = \langle u, w\rangle.$$
    Montrer que $v = (A-\lambda)u$.
    (b) En déduire que si $v \in H \setminus \operatorname{ran}(A-\lambda)$ alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $D(A)$ telle que $\lim \|u_n\| = \infty$ et $v = \lim(A-\lambda)u_n$.
    (c) Montrer que $\lambda \in \tilde{\sigma}(A)$.
4. Que peut-on dire du spectre résiduel de A ? Conclure.