THÉORIE SPECTRALE

MATHÉMATIQUES – MASTER 2 RECHERCHE

Exercice 1. Soit $(A, D(A)$ un opérateur fermé à domaine dense. sur un espace de Hilbert. Montrer que

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Exercice 2. Montrer l'identité de la résolvante

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\mu)R_A(\lambda)$$

lorsque λ et μ sont dans l'ensemble résolvant.

Exercice 3. On se place dans l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbf{N})$ et on considère les opérateurs de décalage à gauche et à droite

$$R(u_0, u_1, u_2 \dots) = (0, u_0, u_1, \dots)$$
$$L(u_0, u_1, u_2, \dots) = (u_1, u_2, u_3, \dots).$$

1. Vérifier que R et L sont des applications linéaires continues. Montrer que R est une isométrie.
2. Calculer les adjoints R^* et L^* de R et L.
3. Montrer que $\sigma(R) \subset \bar{D}(0,1)$ et $\sigma(L) \subset \bar{L} \subset \bar{D}(0,1)$.
4. Montrer que $\sigma_{\mathrm{p}}(R) = \varnothing$ et $\sigma_{\mathrm{p}}(L) = D(0,1)$.
5. Montrer que $\sigma(R) = \sigma(L) = \bar{D}(0,1)$.
6. Déterminer le spectre résiduel de R et L.
7. Montrer que $\sigma_{\mathrm{c}}(R) = \partial D(0,1)$ et $\sigma_{\mathrm{c}}(L) = \varnothing$.

Exercice 4. On se place dans $H = L^2(\mathbf{R}^n)$ et on considère l'opérateur non borné

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) : x_j u \in L^2(\mathbf{R}^n)\}, \quad Au = x_j u.$$

1. Montrer que A est fermé à domaine dense.
2. Montrer que A est symétrique puis autoadjoint.
3. Montrer que $\sigma_p(A) = \varnothing$.
4. Montrer que $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{c}}(A) = \mathbf{R}$.

Exercice 5. Dans un espace de Hilbert, soit $(A, D(A))$ un opérateur symétrique, montrer l'équivalence des assertions suivantes

(i) alors A est autoadjoint

(ii) A est fermé et $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$,

(iii) $\operatorname{ran}(A \pm i) = H$.

En déduire que le laplacien sur $H = L^2(\mathbf{R}^n)$

$$D(A) = H^2(\mathbf{R}^n), \quad Au = -F^{-1}(|\xi|^2 Fu)$$

est auto-adjoint.

Exercice 6. On se place dans l'espace de Hilbert $H = L^2([a, b])$, et on considère l'opérateur

$$Tu(x) = \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la définition de T fait sens et que T est une application linéaire continue sur H.
2. Calculer T^*.
3. Montrer que T est compact
4. Calculer les valeurs propres de T.
5. Écrire le théorème spectral pour T.