ÉLÉMENTS DE THÉORIE SPECTRALE

DAVID DOS SANTOS FERREIRA — M2

Table des matières

1. Spectre ☙

1.1. **Opérateurs non bornés.** Comme le cours est consacré à la théorie spectrale, on s'intéresse uniquement aux endomorphismes, que l'on désignera aussi sous le terme opérateur. Il est possible évidemment de développer une théorie des applications non bornés entre espaces de Banach distincts.

On se place dans un espace de Banach $(B, \|\cdot\|)$ et on note $\mathcal{L}(B)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus.

Définition 1.1. *Un opérateur non borné est la donnée d'un couple $(A, D(A))$ constitué d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset B$ de B et d'une application linéaire $A : D(A) \to B$.*

Le graphe d'un opérateur non borné $(A, D(A))$ est l'ensemble

$$\Gamma(A) = \big\{(u, Au) : u \in D(A)\big\} \subset B \times B$$

son noyau est l'espace vectoriel

$$\ker A = \big\{u \in D(A) : Au = 0\big\} = \pi_1(\Gamma(A) \cap B \times \{0\})$$

et son image

$$\operatorname{ran} A = \big\{Au : u \in D(A)\big\} = \pi_2(\Gamma(A))$$

où $\pi_j : B \times B \to B$ désigne la projection sur le premier ou second facteur.

Exemple 1.2.

1. On peut définir le laplacien sur $\mathbf{R}^n$ de la manière suivante : $D(A) = H^2(\mathbf{R}^n) = \big\{u \in L^2 : \big(1 + |\xi|^2\big)\widehat{u} \in L^2\big\}$ et $Au = -F^{-1}(|\xi|^2 Fu)$ où F est la transformée de Fourier. Si u est dans la classe de Schwartz $Au = \Delta u$.
2. Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné injectif (i.e. $\ker A = \{0\}$) alors on peut définit un inverse $A^\dagger$ de domaine

$$D(A^\dagger) = \operatorname{ran} A$$

pour lequel on a

$$A^\dagger(Au) = u, \quad u \in D(A), \quad A(A^\dagger v) = v, \quad v \in D(A^\dagger) = \operatorname{ran} A.$$

En particulier, le laplacien défini précédemment est injectif (car $\widehat{\Delta u} = -|\xi|^2\widehat{u}$) , et on peut donc définir $\Delta^\dagger$ sur le domaine

$$D(\Delta^\dagger) = \operatorname{ran}\Delta = \left\{v \in L^2(\mathbf{R}^n) : |\xi|^{-2}\widehat{v} \in L^2(\mathbf{R}^n)\right\}.$$

Définition 1.3. *On dit qu'un opérateur non borné est fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est fermé. On dit qu'un opérateur non borné est défini de manière dense si son domaine est dense dans l'espace.*

Remarque 1.4. D'après le théorème du graphe fermé, si $A \in L(B)$ est un opérateur continu alors son graphe est fermé. Le caractère fermé est une notion plus faible que la continuité, qui s'en rapproche. Un opérateur $(A, D(A))$ est fermé si et seulement si son domaine $D(A)$ muni de la norme du graphe

$$\|u\|_A = \sqrt{\|u\|^2 + \|Au\|^2}$$

est un espace complet.

Remarque 1.5. Le domaine de définition d'un opérateur non borné qui est fermé, défini de manière dense et continu sur son domaine est en fait l'espace tout entier et $A \in L(B)$ est un opérateur borné. En effet la continuité de A sur $D(A)$ permet de dire que la norme du graphe $\|\cdot\|_A$ et la norme de départ $\|\cdot\|$ sont équivalentes sur $D(A)$. Le caractère fermé de A implique alors que le domaine est complet donc fermé (pour la norme du graphe donc pour la norme de départ) et la densité du domaine permet de conclure

$$D(A) = \overline{D(A)} = B.$$

Lemme 1.6. *Le noyau d'un opérateur non borné fermé est fermé.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de $\ker A$ qui converge vers $u \in B$. Alors la suite $((u_k, 0))_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite du graphe $\Gamma(A)$ qui converge vers $(u, 0)$ et comme le graphe est fermé $(u, 0) \in \Gamma(A)$ ce qui implique $u \in D(A)$ et $0 = Au$ et par conséquent $u \in \ker A$. □

Définition 1.7. *Soient $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ deux opérateurs non bornés, on définit la relation d'ordre suivante*

$$A \subset B \Leftrightarrow \Gamma(A) \subset \Gamma(B)$$

ce qui équivaut au fait que B est un prolongement de A

$$D(A) \subset D(B), \quad B|_{D(A)} = A|_{D(A)}.$$

Définition 1.8. *On dit qu'un opérateur non borné $(A, D(A))$ est fermable lorsque l'adhérence de son graphe est le graphe d'un opérateur $(\bar{A}, D(\bar{A}))$. Dans ce cas $\bar{A}$ est appelé la fermeture de A. Il est clair que $A \subset \bar{A}$, et de plus $\bar{A}$ est la plus petite extension fermée[1] de A.*

Lemme 1.9. *Un opérateur non borné est fermable si et seulement si*

$$\overline{\Gamma(A)} \cap (\{0\} \times B) = \{(0, 0)\}.$$

1. En effet, il est clair que $\bar{A}$ est fermé et si $\tilde{A}$ est une extension fermée de A alors $\Gamma(\tilde{A}) = \overline{\Gamma(\tilde{A})} \supset \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\bar{A})$ et donc $\bar{A} \subset \tilde{A}$.

Démonstration. Si A est fermable alors
$$\overline{\Gamma(A)} \cap (\{0\} \times B) = \Gamma(\bar{A}) \cap (\{0\} \times B) = \{(0,0)\}.$$
Réciproquement si $\overline{\Gamma(A)} \cap (\{0\} \times B) = \{(0,0)\}$ alors si
$$(u,v) \in \overline{\Gamma(A)} \quad \text{et} \quad (u,\tilde{v}) \in \overline{\Gamma(A)}$$
on en déduit
$$(0, v - \tilde{v}) \in \overline{\Gamma(A)}$$
et ainsi $v = \tilde{v}$, ce qui signifie que $\overline{\Gamma(A)}$ est un graphe. □

Définition 1.10. *La transposée d'un opérateur non borné $(A, D(A))$ de domaine dense dans B est un opérateur non borné $({}^{\mathrm{t}}A, D({}^{\mathrm{t}}A))$ de B' de domaine*
$$D({}^{\mathrm{t}}A) = \big\{\phi \in B' : \exists C \geq 0 \text{ tel que } |\phi(Au)| \leq C\|u\| \text{ pour tout } u \in D(A)\big\}$$
et défini par
$${}^{\mathrm{t}}A(\varphi) = \varphi \circ A \in B'$$
lorsque $\varphi \in D({}^{\mathrm{t}}A)$.

Le fait que le domaine $D(A)$ de A est dense permet de prolonger de manière unique la forme linéaire $\varphi \circ A$ *a priori* définie sur le domaine de A en une forme linéaire sur B. Si le domaine n'est pas dense, on peut utiliser le théorème de Hahn-Banach pour prolonger cette forme mais le prolongement n'est pas unique et la transposée ne peut être définie sans ambigüité.

Remarque 1.11. On rappelle qu'il existe une injection de l'espace de départ dans le bidual via le morphisme canonique
$$\begin{aligned} J : B &\to B'' \\ u &\mapsto J(u) = \delta_u \end{aligned}$$
où $\delta_u : B' \to \mathbf{C}$ est l'application d'évaluation. Le morphisme J est injectif car si
$$\phi(u) = 0, \quad \forall \varphi \in B'$$
alors $u = 0$ par le théorème de Hahn-Banach. C'est même une isométrie. Les espaces réflexifs sont ceux pour lesquels J est un isomorphisme. Si B est un espace réflexif, on peut donc identifier B'' et B via l'isomorphisme J, et considérer ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)$ comme un opérateur non borné sur l'espace B.

Lorsque l'espace B est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz permet d'identifier B' et B. Pour tout $\varphi \in B'$ il existe un vecteur $v \in B$ tel que
$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle.$$
Par conséquent, on a pour tout $\varphi \in D({}^{\mathrm{t}}A)$ et tout $u \in B$
$${}^{\mathrm{t}}A(\varphi)(u) = \varphi(Au) = \langle Au, v \rangle$$
et l'on voit que si l'on peut définir un adjoint A^* de A vérifiant
$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle, \quad u \in D(A), v \in D(A^*)$$
alors
$${}^{\mathrm{t}}A(\varphi)(u) = \langle u, A^* v \rangle$$

et le vecteur $A^*v \in B$ représente la forme ${}^{\mathrm{t}}A(\varphi) \in B^*$. Il est donc utile de pouvoir définir un adjoint lorsque l'on dispose d'une structure hilbertienne.

Définition 1.12. *L'adjoint d'un opérateur non borné $(A, D(A))$ densément défini sur un espace de Hilbert H est l'opérateur non borné $(A^*, D(A^*))$ de domaine*

$$D(A^*) = \{v \in H : \exists C \geq 0 \text{ tel que } |\langle Au, v\rangle| \leq C\|v\| \text{ pour tout } u \in D(A)\}$$

et vérifiant

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$$

pour tout $u \in D(A)$ et tout $v \in D(A^*)$. On dit qu'un opérateur non borné est autoadjoint si

$$D(A^*) = D(A), \quad A^* = A$$

et antiadjoint si

$$D(A^*) = D(A), \quad A^* = -A.$$

On dit qu'il est symétrique si

$$A \subset A^*.$$

Voyons pourquoi un tel opérateur existe. Le domaine $D(A^*)$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de H. Lorsque $v \in D(A^*)$, la forme linéaire $D(A) \ni u \mapsto \langle Au, v\rangle$ est continue, et peut être prolongée de manière unique à H. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur A^*v qui représente cette forme linéaire

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle.$$

Il est aisé de vérifier que l'application $v \mapsto A^*v$ est linéaire sur $D(A^*)$.

Proposition 1.13. *L'adjoint d'un opérateur non borné densément défini est fermé. L'adjoint d'un opérateur est défini de manière dense si et seulement si A est fermable. En outre, si A est fermable alors on a*

$$(A^*)^* = \bar{A}.$$

Démonstration. On munit $B \times B$ du produit scalaire

$$\langle (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})\rangle = \langle u, \tilde{u}\rangle + \langle v, \tilde{v}\rangle$$

on introduit l'isométrie $S : B \times B \to B \times B$ donnée par

$$S(u, v) = (-v, u)$$

et on constate que

$$\Gamma(A^*) = S(\Gamma(A))^\perp = S(\Gamma(A)^\perp)$$

Comme l'orthogonal d'un sous-espace est toutjours fermé, cela montre que A^* est fermé.

Comme $S \circ S = -\mathrm{Id}_{H\times H}$, on a également

$$\Gamma(A)^\perp = S(\Gamma(A^*))$$

et en prenant l'orthogonal

$$\overline{\Gamma(A)} = S(\Gamma(A^*))^\perp.$$

Soit A un opérateur fermable alors montrons que $D(A^*)^\perp = \{0\}$. Soit $v \in D(A^*)^\perp$ alors
$$\langle v, A^*u\rangle = 0, \quad u \in D(A^*)$$
on en déduit
$$(v, 0) \in (S(\Gamma(A^*))^\perp = \overline{\Gamma(A)}$$
et donc $v = 0$. En outre, comme $D(A^*)$ est dense, on peut considérer l'adjoint de A^* et on a
$$\overline{\Gamma(A)} = S(\Gamma(A^*))^\perp = \Gamma((A^*)^*).$$
ce qui implique $\bar{A} = (A^*)^*$. Réciproquement si l'adjoint de A est densément défini alors
$$(v, 0) \in \overline{\Gamma(A)} = S(\Gamma(A^*))^\perp$$
implique que $v \in D(A^*)^\perp$ et donc $v = 0$. □

Lemme 1.14. *Soit $(A, D(A))$ un oérateur non borné densément défini alors* $\ker A^* = (\operatorname{ran} A)^\perp$.

Démonstration. Soit $u \in \ker A^*$ alors pour tout $v \in D(A)$
$$\langle u, Av\rangle = \langle A^*u, v\rangle = 0$$
et réciproquement si $u \in (\operatorname{ran} A)^\perp$ alors on a pour tout $v \in D(A)$
$$\langle u, Av\rangle = 0$$
ce qui implique que $u \in D(A^*)$ et par suite
$$\langle A^*u, v\rangle = \langle u, Av\rangle = 0$$
pour tout $v \in D(A)$ et comme le domaine est dense, on a finalement $A^*u = 0$. □

Remarque 1.15. En particulier, si l'adjoint de A est injectif alors l'image de A est dense dans H.

1.2. **Définition du spectre et résolvente.**

Définition 1.16. *L'ensemble résolvant d'un opérateur non borné $(A, D(A))$ est l'ensemble $\varrho(A)$ des valeurs $\lambda \in \mathbf{C}$ telles que $(A - \lambda) : D(A) \to B$ est inversible d'inverse continu*
$$R_A(\lambda) = (A - \lambda)^{-1} : B \to D(A).$$
Lorsqu'elle existe, $R_A(\lambda)$ est appelée la résolvante de A.

Le spectre est le complémentaire de l'ensemble résolvant
$$\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \varrho(A).$$

Remarque 1.17. Si l'opérateur A n'est pas fermé alors le spectre est le plan complexe
$$\sigma(A) = \mathbf{C}.$$
La théorie spectral n'a donc un intérêt que pour les opérateurs fermés. En effet si l'ensemble résolvant n'est pas vide alors le fait que $(A - \lambda)^{-1}$ existe implique que
$$\Gamma(A - \lambda) = \theta(\Gamma((A - \lambda)^{-1}), \quad \theta(u, v) = (v, u)$$
et comme $(A - \lambda)^{-1}$ est continue, son graphe est fermé et donc le graphe de $(A - \lambda)$ est fermé. Il est facile d'en déduire que le graphe de A est fermé.

Remarque 1.18. Notons que si $(A, D(A))$ est fermé et si $(A-\lambda)$ est bijectif alors
$$\Gamma((A-\lambda)^{-1}) = \theta(\Gamma(A-\lambda))$$
est fermé et d'après le théorème du graphe fermé, la réciproque $(A-\lambda)^{-1}$ est continue. Il n'est donc pas nécessaire de vérifier la continuité de la réciproque pour vérifier si un nombre est dans l'ensemble résolvant.

L'identité de la résolvante est la suivante : pour tous $\lambda, \mu \in \varrho(A)$
$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = R_A(\lambda)(\lambda-\mu)R_A(\mu).$$
Elle provient de l'identité
$$(A-\mu) - (A-\lambda) = \lambda - \mu$$
à laquelle on applique les résolvantes $R_A(\lambda)$ et $R_A(\mu)$.

Lemme 1.19. *Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble fermé de $\mathbf{C}$. Lorsque $A \in L(B)$, c'est un compact non vide contenu dans le disque de rayon $\|A\|$*
$$\sigma(A) \subset \bar{D}(0, \|A\|).$$

Démonstration. Montrons que $\varrho(A)$ est ouvert : soit $\lambda_0 \in \varrho(A)$ alors on a pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$
$$A - \lambda = A - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0) = (A-\lambda_0)(\mathrm{I} - (A-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0)).$$
Or $(A-\lambda_0)^{-1}$ est continue donc pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ vérifiant
$$|\lambda - \lambda_0| < \|(A-\lambda_0)^{-1}\|^{-1}$$
on peut inverser $\mathrm{I} - (A-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0)$ par série de Neumann
$$(\mathrm{I} + (A-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(A-\lambda_0)^{-k}(\lambda-\lambda_0)^k$$
ce qui donne
$$(A-\lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(A-\lambda_0)^{-k-1}(\lambda-\lambda_0)^k \tag{1.1}$$
et par conséquent
$$D\big(\lambda_0, \|(A-\lambda_0)^{-1}\|^{-1}\big) \subset \varrho(A).$$
Soit maintenant $A \in L(B)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$ on peut inverser
$$A - \lambda = -\lambda(\mathrm{I} - \lambda^{-1}A)$$
par série de Neumann
$$(A-\lambda)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k-1}A^k$$
ce qui implique
$$\sigma(A) \subset \bar{D}(0, \|A\|)$$
et donc que $\sigma(A)$ est compact.

Supposons que le spectre soit vide alors on considère la fonction suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbf{C} &\to \mathbf{C} \\ \lambda &\mapsto \varphi((A-\lambda)^{-1}u) \end{aligned}$$

où $u \in B$ et $\varphi \in B'$. Montrons que cette fonction est entière. Soit $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ alors d'après la première partie de la preuve 1.1

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((A-\lambda_0)^{-k-1}u)\,(\lambda-\lambda_0)^k$$

pour tout $\lambda \in D(\lambda_0, \|(A-\lambda_0)^{-1}\|^{-1})$. De plus, cette fonction est bornée puisque pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| \geq 2\|A\|$, on a

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1}\|A\|^k = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$$

et par conséquent

$$|f(\lambda)| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}\|\varphi\|_{B'}\|u\|_B \leq \frac{1}{\|A\|}\|\varphi\|_{B'}\|u\|_B.$$

Une fonction entière et bornée est, d'après le théorème de Liouville, constante ; on a donc

$$\varphi((A-\lambda)^{-1}u) = \varphi(A^{-1}u)$$

pour tout $\varphi \in B'$ et tout $u \in B$. Ceci implique

$$(A-\lambda)^{-1}u = A^{-1}u$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $u \in B$, et par conséquent

$$Au = Au - \lambda u$$

pour tout $u \in B$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$ ce qui est absurde. □

Exemple 1.20. Voici un exemple d'opérateur (non borné) dont le spectre est vide et un exemple dont le spectre est plein. L'espace ambiant est $H = L^2([0,1])$ et

$$A = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

1. $D(A) = H^1(]0,1[) \cap \{u \in C^0([0,1]) : u(0) = 0\}$: dans ce cas, le spectre est vide. En effet soit $\lambda \in \mathbf{C}$ alors pour tout $f \in L^2([0,1])$

$$u = (A-\lambda)^{-1}f = i\int_0^x \mathrm{e}^{i\lambda(x-y)}f(y)\,\mathrm{d}y.$$

   Vérifions que le terme de droite est bien une fonction L^2

$$\int_0^1 \left| \int_0^x \mathrm{e}^{i\lambda(x-y)}f(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \leq \|f\|^2$$

par Cauchy-Schwarz. De plus sa dérivée faible est $-if - \lambda u \in L^2$ car pour tout $\varphi \in C_0^\infty(]0,1[)$

$$\int_0^1 \varphi'(x) \int_0^x \mathrm{e}^{i\lambda(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-i\lambda y} f(y) \int_y^1 \mathrm{e}^{i\lambda x}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= -\int_0^1 f(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - i\lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{i\lambda(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

par Fubini et par une intégration par parties. C'est donc une fonction H^1 et continue (par le théorème de convergence de Lebesgue) et $u(0) = 0$. Enfin, on a

$$(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)f = i\int_0^x \mathrm{e}^{i\lambda(x-y)}(f'(y) - \lambda f(y))\,\mathrm{d}y$$

2. $D(A) = H^1([0,1])$ alors pour tout $\lambda \in C$

$$A(\mathrm{e}^{i\lambda x}) = \lambda \mathrm{e}^{i\lambda x}.$$

On remarque en particulier que le spectre dépend du domaine choisi. Ces deux opérateurs sont fermés . En effet, si la suite $((u_k, -iu_k))_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans $L^2 \times L^2([0,1])$ vers (u,v) alors on a pour tout $\varphi \in C^\infty(]0,1[)$

$$\int_0^1 u\varphi'\,\mathrm{d}x = \lim \int_0^1 u_k\varphi'\,\mathrm{d}x = -\lim\int_0^1 u_k'\varphi\,\mathrm{d}x = -i\int_0^1 v\varphi\,\mathrm{d}x$$

ce qui implique que iv est la dérivée faible de u, donc que $u \in H^1([0,1])$ et $-iu' = v$. Dans le premier exemple, on a de plus

$$u = \lim u_k = \lim \int_0^x u_k'(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x u'(y)\,\mathrm{d}y$$

et ainsi u est continue et $u(0) = 0$. Enfin, dans les deux cas, l'opérateur est symétrique $A \subset A^*$ mais non-autoadjoint.

Exemple 1.21.

1. Le laplacien sur $\mathbf{R}^n$ défini en 1.2 a pour spectre

$$\sigma(\Delta) = \mathbf{R}_-.$$

En effet, soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, on peut définir

$$(\Delta - \lambda)^{-1} f = F^{-1}\left(\frac{\widehat{f}}{|\xi|^2 + \lambda}\right)$$

car on a la majoration

$$\left|\frac{\widehat{f}(\xi)}{|\xi|^2+\lambda}\right| \leq \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{(|\xi|^2 + \operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2} \leq \begin{cases} \dfrac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{(\operatorname{Re}\lambda)^2} & \text{si } \lambda \in \mathbf{R}_+^* \\ \dfrac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{(\operatorname{Im}\lambda)^2} & \text{si } \lambda \notin \mathbf{R} \end{cases}.$$

Réciproquement, si $\lambda \in \mathbf{R}_-^*$ alors montrons que $\operatorname{ran}(\Delta - \lambda) \subsetneq L^2(\mathbf{R}^n)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction positive radiale qui vaut 1 au voisinage de $r = |\xi| = \sqrt{-\lambda}$, si χ était dans l'image de $\Delta - \lambda$ alors χ

$$\int_0^\infty \frac{|\chi(r)|^2}{(r+\sqrt{-\lambda})(r-\sqrt{\lambda})} r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \infty$$

2. Dans $L^2([-\pi,\pi])$, on considère l'opérateur défini par

$$D(A) = \big\{u \in L^2([-\pi,\pi]) : \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^4 |c_k(u)|^2 < \infty\big\},$$
$$Au = -\sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2 c_k(u) \mathrm{e}^{-ikx}$$

où $(c_k(u))_{k\in\mathbf{Z}}$ désigne la famille des coefficients de Fourier de u. Notons que si $u \in C^2_{\mathrm{per}}(\mathbf{R})$ alors $Au = u''$. Le spectre de A est

$$\sigma(A) = \big\{-k^2 : k \in \mathbf{N}\big\}.$$

En effet, on a

$$A(\mathrm{e}^{ikx}) = -k^2 \mathrm{e}^{ikx}$$

et réciproquement si $\lambda \in \mathbf{C}$ n'est pas l'opposé d'un carré d'un entier alors

$$(A-\lambda)^{-1} f = -\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{c_k(f)}{k^2+\lambda} \mathrm{e}^{ikx}$$

qui est bien défini car

$$|k^2+\lambda| = \big(|k| + \sqrt{-\lambda}\big)\big||k| - \sqrt{-\lambda}\big| \geq \sqrt{-\lambda}\big\{\sqrt{-\lambda}\big\} > 0$$

où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire.

1.3. **Spectre ponctuel, résiduel et continu.**

Définition 1.22. *On peut décomposer le spectre d'un opérateur non borné* $(A, D(A))$ *en trois sous-ensembles*

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{res}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(A)$$

Le spectre ponctuel $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ *est l'ensemble des valeurs propres de* A*, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs* $\lambda \in \mathbf{C}$ *pour lesquelles* $A - \lambda$ *n'est pas injectif (ou de manière équivalente pour lesquelles* $\ker(A-\lambda)$ *n'est pas réduit à l'espace vectoriel nul).*

Le spectre résiduel $\sigma_{\mathrm{res}}(A)$ *est l'ensemble des valeurs* $\lambda \in \mathbf{C}$ *telles que* $\operatorname{ran}(A-\lambda)$ *n'est pas dense dans* B

$$\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda)} \subsetneq B.$$

Le spectre continu $\sigma_{\mathrm{c}}(A)$ *est le complémentaire dans le spectre de la réunion du spectre ponctuel et résiduel*

$$\sigma_{\mathrm{c}}(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{res}}(A)).$$

C'est donc l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbf{C}$ *telles que* $A-\lambda$ *est injectif, non surjectif et d'image dense*

$$\operatorname{ran}(A-\lambda) \subsetneq \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda)} = B.$$

Remarque 1.23. Si A est un opérateur fermé, lorsque $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, en suivant la remarque 1.2, on peut définir un opérateur non borné $(A-\lambda)^{\dagger}$ fermé de domaine $D((A-\lambda)^{\dagger}) = \operatorname{ran}(A-\lambda)$ et d'image $\operatorname{ran}(A-\lambda)^{\dagger} = D(A)$. Si $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$ alors $(A-\lambda)^{\dagger}$ est à domaine dense, fermé mais ne peut être continu (sinon ce serait un opérateur borné d'après la remarque 1.5 et λ ne serait pas dans le spectre). En particulier, il existe une suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ qui tend vers 0 telle que $u_k = (A-\lambda)^{\dagger} v_k$ ne tend pas vers 0 ; quitte à extraire et à normaliser, on peut supposer que $\|u_n\| = 1$ et la suite $(v_k = (A-\lambda)u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Remarque 1.24. Il est clair que $(A-\lambda)^* = A^* - \bar{\lambda}$; le seul point à vérifier est $D((A-\lambda)^*) = D(A^*)$ qui découle facilement d'inégalités triangulaires et de Cauchy-Schwarz. D'après le lemme 1.14, si A est un opérateur densément défini

$$\ker(A^* - \bar{\lambda}) \neq \{0\}$$

et donc λ est dans le spectre résiduel si et seulement si $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A^*. En particulier si A est autoadjoint alors

$$\sigma_{\mathrm{res}}(A) = \varnothing$$

et par conséquent

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(A).$$

Exemple 1.25. Pour le laplacien sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\sigma(\Delta) = \sigma_{\mathrm{c}}(\Delta) = \mathbf{R}_-$$

On a montré que $\sigma(\Delta) = \mathbf{R}_-$ et comme $\sigma_{\mathrm{p}}(\Delta) = \varnothing$ et Δ est autoadjoint, on en tire que le spectre ne peut qu'être continu. Notons qu'il est facile de montrer que $\operatorname{ran}(\Delta - \lambda)$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ pour $\lambda \in \mathbf{R}_-$; si $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ il suffit de considérer la fonction

$$u_\varepsilon = (\Delta - \lambda - i\varepsilon)^{-1} f$$

pour laquelle

$$\|f - (\Delta-\lambda)u_\varepsilon\|^2 = (2\pi)^{-n} \int \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (|\xi|^2+\lambda)^2}}_{\leq 1} |\widehat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

a une limite nulle lorsque ε tend vers 0 par convergence dominée.

Lemme 1.26. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné fermé de domaine dense dont l'adjoint est injectif et qui vérifie*

$$|\langle Au, u\rangle| \geq C\|u\|^2$$

pour tout $u \in D(A)$ alors A est inversible et sa réciproque A^{-1} est bornée.

Démonstration. Le noyau de A est clairement trivial. En outre, on a

$$\overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^{\perp} = H$$

Montrons que $\operatorname{ran} A$ est fermé : soit $(Au_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de $\operatorname{ran} A$ qui converge vers v, comme on a

$$\|u_k - u_\ell\| \leq \frac{1}{C}\|Au_k - Au_\ell\|$$

la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy et converge donc vers $v \in H$. La suite $((u_k, Au_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge alors vers (u,v) et comme A est un opérateur fermé, on en tire $u \in D(A)$ et $v = Au$. Ce qui prouve que ran A est fermé

$$\operatorname{ran} A = \overline{\operatorname{ran} A} = H.$$

Ainsi A est inversible et comme le graphe de A^{-1} est fermé, la réciproque est continue. □

Lemme 1.27. *Soit A un opérateur autoadjoint alors*

$$\sigma(A) \subset \mathbf{R}.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, comme A est autoadjoint

$$\langle Au, u\rangle \in \mathbf{R}$$

pour tout $u \in D(A)$ et ainsi on a l'estimation

$$|\langle (A-\lambda)u, u\rangle| \geq |\operatorname{Im}\langle (A-\lambda)u, u\rangle| = |\operatorname{Im}\lambda|\, \|u\|^2.$$

Or $(A-\lambda)^* = A^* - \bar{\lambda}$ est également injectif. D'après le lemme précédent, $A-\lambda$ est inversible et donc $\lambda \in \varrho(A)$. □

Lemme 1.28. *Soit A un opérateur symétrique, alors A est autoadjoint si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

(*i*) *A est fermé et* $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$,

(*ii*) $\operatorname{ran}(A \pm i) = H$.

Démonstration. Si A est autoadjoint alors A est fermé et $\sigma(A) \subset \mathbf{R}$ ainsi $\ker(A^* \pm i) = \ker(A \pm i) = \{0\}$. Si A est symétrique alors

$$\langle Au, u\rangle \in \mathbf{R}$$

et par conséquent, on a

$$|\langle (A \pm i)u, u\rangle| \geq |\operatorname{Im}\langle (A \pm i)u, u\rangle| = \|u\|^2.$$

Comme A est fermé, le lemme 1.14 implique que

$$\operatorname{ran}(A \pm i) = H.$$

Finalement, montrons que $\operatorname{ran}(A \pm i) = H$ implique $D(A^*) \subset D(A)$. Soit $u \in D(A^*)$, comme $(A^* + i)u \in H = \operatorname{ran}(A+i)$ il existe $v \in D(A)$ tel que

$$(A^* + i)u = (A+i)v.$$

Comme A est symétrique $(A+i)v = (A^*+i)v$ et on en tire

$$u - v \in \ker(A+i) = \operatorname{ran}(A^* - i)^{\perp}.$$

Or $A \subset A^*$ implique

$$\operatorname{ran}(A - i) \subset \operatorname{ran}(A^* - i)$$

et ainsi $H = \operatorname{ran}(A^* - i)$, ce qui permet de conclure

$$u - v \in \operatorname{ran}(A^* - i)^{\perp} = \{0\}$$

soit $u = v \in D(A)$. □

Lemme 1.29. *Soit A un opérateur autoadjoint. Supposons qu'il existe une suite de $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de réels et un base hilbertienne $(\psi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de H tels que*

$$A\psi_k = \lambda_k\psi_k$$

alors le spectre est donnée par la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et ses valeurs d'adhérence

$$\sigma(A) = \overline{\{\lambda_k : k \in \mathbf{N}\}}.$$

Démonstration. On a par définition

$$\{\lambda_k : k \in \mathbf{N}\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \sigma(A)$$

et comme le spectre est fermé

$$\overline{\{\lambda_k : k \in \mathbf{N}\}} \subset \sigma(A).$$

Inversement soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus F$ avec $F = \overline{\{\lambda_k : k \in \mathbf{N}\}}$, alors

$$d(\lambda, F) > 0$$

et par conséquent, comme on a

$$\langle Au, \psi_k\rangle = \langle u, A\psi_k\rangle = \overline{\lambda_k}\langle u, \psi_k\rangle$$

on en tire que l'opérateur

$$(A-\lambda)u\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k-\lambda)\langle u, \psi_k\rangle$$

est inversible d'inverse

$$(A-\lambda)^{-1}u\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\langle u, \psi_k\rangle$$

qui est continu puisque

$$\|(A-\lambda)^{-1}u\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k-\lambda|^2}|\langle u, \psi_k\rangle|^2 \leq \frac{1}{d(\lambda, F)}^2\sum_{k=0}^{\infty}|\langle u, \psi_k\rangle|^2 = \frac{\|u\|^2}{d^2(\lambda, F)}.$$

Ainsi a-t-on $F \subset \sigma(A)$. □

2. Théorème spectral pour les opérateurs bornés

2.1. **Opérateurs compacts.**

Définition 2.1. *Un endomorphisme $A : B \to B$ sur un espace de Banach est dit compact si l'image de tout ensemble borné par A est relativement compacte, i.e.*

$$\overline{A(\bar{B}(0,1))} \quad \textit{est compact.}$$

Autrement dit de toute suite $(Au_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée on peut extraire une sous-suite convergente $(Au_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ vers $v \in B$.

Proposition 2.2. *L'ensemble $\mathcal{K}(B)$ des opérateurs compacts sur un espace de Banach B est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(B)$ des applications continues sur B. C'est de plus un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(B)$.*

Démonstration. □

Théorème 2.3. *Soit A un opérateur compact sur un espace de Banach de dimension infinie. Alors 0 est dans le spectre de A, et*

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$$

et cet ensemble est soit fini, soit une suite qui tend vers 0. En outre, lorsque $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ les espaces propres

$$\ker(A - \lambda)$$

sont de dimension finie.

Remarque 2.4. Le fait que $\lambda \in \mathbf{C}^*$ ne puisse être qu'une valeur propre signifie que $A - \lambda$ est soit non-injectif soit bijectif, ce qui se rapproche de la situation des matrices. On refère à ce fait comme étant l'alternative de Fredholm ; cette alternative est valable pour des opérateurs plus généraux qu'une perturbation compacte (d'un multiple) de l'identité, les opérateurs de Fredholm.

La démonstration de l'alternative requiert plusieurs lemmes.

Lemme 2.5. *Un endomorsphime $T \in \mathcal{L}(B)$ est d'image fermée si et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $u \in B$*

$$d(u, \ker T) \leq C\|Tu\|.$$

Démonstration. Comme $\ker T$ est fermé, le quotient $\dot{B} = B/\ker T$ est bien défini. Muni de la norme

$$\|\dot{u}\| = d(u, \ker T)$$

où u est un représentant de $\dot{u}$, c'est un espace de Banach. On considère l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \dot{T} : \dot{B} &\to \operatorname{ran} T \\ \dot{u} &\mapsto Tu. \end{aligned}$$

L'inégalité de l'énoncé du lemme prend la forme

$$\|\dot{u}\| \leq C\|\dot{T}\dot{u}\|, \quad \dot{u} \in \dot{B}$$

ou encore

$$\|\dot{T}^{-1}(\dot{v})\| \leq C\|v\|, \quad v \in B$$

ce qui équivaut à la continuité de $\dot{T}^{-1}$. Si $\dot{T}^{-1}$ est continue alors $\dot{T}$ est un homéomorphisme et $\operatorname{ran} T$ est fermée. Réciproquement si $\operatorname{ran} T$ est fermée alors $\dot{T} : \dot{B} \to \operatorname{ran} T$ est un isomorphisme continue entre deux espaces de Banach et par le théorème de l'application ouverte, sa réciproque est continue. □

Lemme 2.6. *Soit A un opérateur compact, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$ l'espace vectoriel $\ker(A - \lambda)$ est de dimension finie et l'espace vectoriel $\operatorname{ran}(A - \lambda)$ est fermé.*

Démonstration. En effet, la boule fermée unité

$$\bar{B}(0, 1) \cap \ker(A - \lambda)$$

du sous-espace $\ker(A-\lambda)$ est compacte, puisque d'une suite $(u_k)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\ker(A-\lambda)$ avec $\|u_k\|\leq 1$ on peut extraire une sous-suite telle que $(Au_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $v\in B$ et on a alors

$$\lim u_{\varphi(k)} = \frac{1}{\lambda}\lim Au_{\varphi(k)} = \frac{1}{\lambda}v$$

ce qui prouve la compacité de la boule unité fermée de $\ker(A-\lambda)$. D'après le théorème de Riesz, cet espace vectoriel est de dimension finie.

D'après le lemme qui précède, pour montrer que l'image $\operatorname{ran}(A-\lambda)$ est fermée, il suffit de montrer qu'il existe $C\geq 0$ tel que pour tout $u\in B$ on a

$$d(u,\ker(A-\lambda))\leq C\|(A-\lambda)u\|.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que

$$d(u_k,\ker(A-\lambda)) = 1 \quad\text{ et }\quad \|(A-\lambda)u_k\|\leq\frac{1}{k+1}$$

et par conséquent, il existe $v_k\in\ker(A-\lambda)$ tel que

$$1\leq\|u_k-v_k\|\leq 2$$

ainsi en posant $w_k=(u_k-v_k)/\|u_k-v_k\|$ a-t-on

$$\|w_k\|=1,\quad \|(A-\lambda)w_k\|\leq\frac{1}{(k+1)}.$$

On peut extraire une sous-suite de telle sorte que $(Aw_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers z. On obtient alors que

$$w_{\varphi(k)} = -\frac{1}{\lambda}\big((A-\lambda)w_{\varphi(k)} - Aw_{\varphi(k)}\big)$$

converge vers z/λ. En passant à la limite dans

$$d(w_{\varphi(k)},\ker(A-\lambda)) = \frac{1}{\|u_k-v_k\|}d(u_{\varphi(k)},\ker(A-\lambda))\geq\frac{1}{2}$$

on obtient

$$d(z/\lambda,\ker(A-\lambda))\geq\frac{1}{2}$$

tandis que $\|(A-\lambda)w_{\varphi(k)}\|\leq 1/\varphi(k)+1$ implique

$$z/\lambda\in\ker(A-\lambda)$$

une contradiction. □

Rappelons le lemme de Riesz qui est la pierre angulaire du théorèrme de Riesz sur la non compacité de la boule unité fermée dans les espaces de dimension infinie.

Lemme 2.7 (Riesz)**.** *Dans un espace vectoriel B normé non trivial, soit un sous-espace vectoriel fermé strict $F\subsetneq B$ alors pour tout $\theta\in]0,1[$ il existe un vecteur $u\in B$ tel que*

$$d(u,F)\geq\theta,\quad \|u\|=1.$$

Démonstration. Dans le cas où $B = H$ est un espace de Hilbert, le lemme est trivial puisqu'il suffit de choisir $u \in F^\perp$ unitaire. Avec ce choix on a

$$d(u, F) = \|u\| = 1 \geq \theta.$$

Dans le cas général, on choisit un vecteur $v \in B \setminus F$ et comme

$$\frac{d(v, F)}{\theta} \geq d(v, F) > 0$$

il existe un vecteur $f_0 \in F$ tel que

$$\|v - f_0\| \leq \frac{d(v, F)}{\theta}.$$

On choisit le vecteur unitaire

$$u = \frac{v - f_0}{\|v - f_0\|}$$

pour lequel on a

$$\|u - f\| \geq \frac{1}{\|v - f_0\|} \left\| v - (\underbrace{f_0 - \|v - f_0\| f}_{\in F}) \right\| \geq \frac{\theta}{d(v, F)} d(v, F) = \theta$$

ce qui démontre le lemme de Riesz. $\square$

Lemme 2.8. *Les suites de sous-espaces vectoriels* $(\ker(A-\lambda)^k)_{k \in \mathbf{N}}$ *et* $(\operatorname{ran}(A-\lambda)^k)_{k \in \mathbf{N}}$ *stationnent.*

Démonstration. Remarquons que les sous-espaces vectoriels $\ker(A-\lambda)^k$ et $\operatorname{ran}(A-\lambda)^k$ sont fermés ; le second car

$$(A - \lambda)^k = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-\lambda)^{k-j} A^j}_{\text{compact}} - \underbrace{(-1)^{k-1} \lambda^k}_{\in \mathbf{C}^*}$$

et on peut appliquer le lemme 2.6. Si la suite $(F_k = \operatorname{ran}(A - \lambda)^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante, par le lemme de Riesz dans $F_k \supsetneq F_{k+1}$, on peut construire une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de vecteurs unitaires de F_k tels que

$$d(u_k, F_{k+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Notons que

$$(A - \lambda)(F_k) \subset F_{k+1}.$$

On a alors

$$\|Au_{k+1} - Au_k\| = |\lambda| \left\| u_k - \underbrace{\frac{1}{\lambda}(\lambda u_{k+1} + (A - \lambda)(u_k - u_{k+1})))}_{\in F_{k+1}} \right\| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0$$

ce qui contredit le fait que $(Au_k)_{k \in \mathbf{N}}$ a une valeur d'adhérence.

Si la suite $(F_k = \ker(A - \lambda)^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est strictement croissante, par le lemme de Riesz dans $F_{k+1} \supsetneq F_k$, on peut construire une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de vecteurs unitaires de F_{k+1} tels que

$$d(u_k, F_k) \geq \frac{1}{2}.$$

Notons que

$$(A-\lambda)(F_{k+1}) \subset F_k.$$

On a alors

$$\|Au_{k+1} - Au_k\| = |\lambda| \left\| u_k - \underbrace{\frac{1}{\lambda}(\lambda u_{k+1} + (A-\lambda)(u_k - u_{k+1})))}_{\in F_k} \right\| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0$$

ce qui contredit le fait que $(Au_k)_{k\in\mathbf{N}}$ a une valeur d'adhérence. □

Lemme 2.9. *Soit T un endomorphisme de B alors*
— $\ker T^{2k} = \ker T^k$ *implique* $\ker T^k \cap \operatorname{ran} T^k = \{0\}$,
— $\operatorname{ran} T^{2k} = \operatorname{ran} T^k$ *implique* $B = \operatorname{ran} T^k + \ker T^k$.
Ainsi lorsque $\ker T^{2k} = \ker T^k$ *et* $\operatorname{ran} T^{2k} = \operatorname{ran} T^k$ *on a*

$$B = \operatorname{ran} T^k \oplus \ker T^k.$$

Démonstration. Soit $v \in \ker T^k \cap \operatorname{ran} T^k$ alors $v = T^k(u)$ et on a

$$T^{2k}(u) = 0.$$

Par conséquent, si $\ker T^{2k} = \ker T^k$ alors $u \in \ker T^{2k}$, ce qui implique $v = 0$. Soit $u \in B$, si $\operatorname{ran} T^{2k} = \operatorname{ran} T^k$ alors il existe $v \in B$ tel que $T^k(u) = T^{2k}(v)$ et on a la décomposition

$$u = T^k(u) + (u - T^k(v))$$

avec $u - T^k(v) \in \ker T^k$, ce qui prouve $B = \operatorname{ran} T^k + \ker T^k$. □

Démonstration du théorème 2.3. Si 0 n'est pas dans le spectre de A alors A est bijectif de réciproque A^{-1} continue, l'image de la boule unité fermée par A est donc fermée et

$$\bar{B}(0,1) = A^{-1}(A(\bar{B}(0,1)))$$

est compacte comme image d'un compact par une application continue. Ceci implique par le théorème de Riesz que l'espace est de dimension finie.

Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$, d'après les deux derniers lemmes qui précèdent, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$B = \ker(A-\lambda)^k \oplus \operatorname{ran}(A-\lambda)^k$$

si $\lambda \in \mathbf{C}^* \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ alors

$$B = \operatorname{ran}(A-\lambda)^k = \operatorname{ran}(A-\lambda)$$

ce qui implique λ est dans l'ensemble résolvant.

Montrons que $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \setminus \{0\}$ est isolé dans $\sigma(A)$. Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$B = \ker(A-\lambda)^k \oplus \operatorname{ran}(A-\lambda)^k$$

et la restriction

$$M = (A-\lambda)|_{\ker(A-\lambda)^k} : \ker(A-\lambda)^k \to \ker(A-\lambda)^k$$

est un endomorphisme sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, qui admet 0 pour valeur propre. En dimension finie, les valeurs propres sont isolées, donc $M-\varepsilon$ est inversilbe avec $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$ de module $|\varepsilon|$ assez petit. De plus, la restriction

$$T = (A-\lambda)|_{\operatorname{ran}(A-\lambda)^k} : \operatorname{ran}(A-\lambda)^k \to \operatorname{ran}(A-\lambda)^k$$

est inversible car T est surjectif

$$\operatorname{ran} T = \operatorname{ran}(A-\lambda)^{k+1} = \operatorname{ran}(A-\lambda)^k$$

et injectif

$$\ker T = \ker(A-\lambda) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda)^k \subset \ker(A-\lambda)^k \cap \operatorname{ran}(A-\lambda)^k = \{0\}$$

ce qui implique que $T-\varepsilon$ est inversilbe avec ε assez petit par inversion par série de Neumann. On en tire que

$$A - \lambda - \varepsilon = (M-\varepsilon) \oplus (T-\varepsilon)$$

est inversible avec $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$ de module $|\varepsilon|$ assez petit. Finalement $D(\lambda, |\varepsilon|) \cap \sigma(A) = \varnothing$. Le caractère isolé des valeurs propres non nulles implique que

$$\sigma(A) \cap \left[2^{-m}, 1\right]$$

est un ensemble fini, pour tout $m \in \mathbf{N}$ et donc que $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est soit un ensemble fini, soit une suite qui converge vers 0. $\square$

Théorème 2.10. *Soit A un opérateur compact autoadjoint sur un espace de Hilbert. Alors il existe une base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in J}$ de vecteurs propres.*

Il existe un sous-ensemble dénombrable $N \subset J$ et une famille dénombrable de réels $(\lambda_j)_{j\in N}$ de l'intervalle $[-\|A\|, \|A\|]$ tels que

$$A\psi_j = \lambda_j \psi_j, \quad j \in N$$
$$A\psi_j = 0, \quad j \in J \setminus N$$

Si $N = \mathbf{N}$ est infini alors la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Lemme 2.11. *Soit A un opérateur compact autoadjoint sur un espace de Hilbert H alors $\|A\|$ ou $-\|A\|$ est valeur propre.*

Démonstration. Montrons qu'il existe un vecteur $u \in H$ unitaire tel que

$$\|A\| = \min_{\|v\|=1} \|Av\| = \|Au\|.$$

Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite minimisante de vecteurs unitaires,

$$\|A\| = \lim \|Au_k\|$$

comme A est compact, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ tel que

$$v = \lim Au_{\varphi(k)}$$

il en découle

$$\|A\| = \lim \|Au_{\varphi(k)}\| = \|v\|.$$

En outre, comme

$$\begin{aligned}\|A^2u_k - \|A\|^2u_k\|^2 &= \|A^2u_k\|^2 + \|A\|^4 - 2\|A\|^2\|Au_k\|^2 \\ &\leq 2\|A\|^4 - 2\|A\|^2\|Au_k\|^2\end{aligned}$$

tend vers 0, on en tire

$$\lim u_{\varphi(k)} = \frac{1}{\|A\|} v = u$$

et de plus

$$\|A\| = \|Au\| \quad \text{et} \quad A^2u = \|A\|^2 u.$$

La dernière égalité implique

$$(A + \|A\|)(A - \|A\|)u = 0.$$

Si $(A - \|A\|)u = 0$ alors $\|A\|$ est valeur propre (avec vecteur propre u), et si $(A - \|A\|)u \neq 0$ alors $-\|A\|$ est valeur propre (avec vecteur propre $(A - \|A\|)u$). $\square$

Lemme 2.12. *Soit A un opérateur autoadjoint et soient $\lambda, \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ deux valeurs propres distinctes alors*

$$\ker(A - \lambda) \perp \ker(A - \mu).$$

Démonstration. Cela découle de

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = \mu\langle u, v\rangle$$

lorsque $u \in$ et $v \in \ker(A - \mu)$. $\square$

Démonstration du théorème 2.10. Soit A un opérateur compact autoadjoint non nul alors

$$\varnothing \neq \sigma(A) \setminus \{0\} \subset [-\|A\|, \|A\|]$$

et un ensemble dénombrable de valeurs propre de multiplicité

$$m(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda) \in \mathbf{N}^*.$$

On considère l'espace

$$F = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)\setminus\{0\}} \ker(A - \lambda)}$$

qui est clairement stable par A

$$A(F) \subset F.$$

C'est donc également le cas de $F^\perp$ puisque si $u \in F^\perp$ alors pour tout $f \in F$

$$\langle Au, f\rangle = \langle u, Af\rangle = 0$$

puisque $Af \in F$. On peut également construire une base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in J}$ de

$$\bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)\setminus\{0\}} \ker(A - \lambda)$$

constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_j De plus, le lemme 2.12 donne

$$\ker A \subset F^\perp$$

ce qui implique

$$\overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)\setminus\{0\}} \ker(A - \lambda)} = F \subset \overline{\operatorname{ran} A}.$$

On considère alors la restriction $A_0 = A|_F$ de A à $F^\perp$. C'est un opérateur autoadjoint compact sur l'espace de Hilbert $F^\perp$. Notons que

$$\sigma(A_0) = \{0\}$$

D'après le lemme 2.11 on a forcément

$$\|A_0\| = 0$$

et par conséquent $A_0 = 0$ ce qui implique

$$\ker A = F^{\perp}, \quad \overline{\operatorname{ran} A} = F$$

Finalement, on en tire

$$H = \ker A \oplus F$$

et lorsque $\ker A \neq \{0\}$, il suffit de construire une base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in J_0}$ de $\ker A$ pour compléter la base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in N}$ de F. □

Remarque 2.13. Si $\ker A = \{0\}$ alors $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, on en tire $0 \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$. En particulier, on a $H = F$ et

$$\bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)\backslash\{0\}} \ker(A-\lambda) \subset \operatorname{ran} A \subsetneq F = \overline{\operatorname{ran} A} = H.$$

En outre, l'espace de Hilbert est séparable. Si $\ker A \neq \{0\}$ alors $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ et $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$.

Remarque 2.14. Si P_λ désigne la projection orthogonale sur $\ker(A-\lambda)$ alors

$$A = \sum_{\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)\backslash\{0\}} \lambda P_\lambda.$$

On peut se poser la question de savoir si un opérateur de la forme

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j$$

où $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite de $\mathbf{C}^*$ qui tend vers 0, et où P_j sont des projecteurs orthogonaux sur des sous-espaces vectoriels E_j de dimension finie de H, est un opérateur compact. C'est en effet le cas car

$$A_m = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j P_j$$

est un opérateur de rang fini donc compact, et

$$\lim \|A - A_m\| = 0$$

donc A est compact car $\mathcal{K}(H)$ est fermé. En effet, soit $u \in H$ unitaire alors

$$\begin{aligned}
\|(A-A_m)u\|^2 = \Big\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j P_j u \Big\|^2 &= \sum_{j=m+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j u\|^2 \\
&\leq \sup_{j\geq m+1} |\lambda_j|^2 \underbrace{\sum_{j=m+1}^{\infty} \|P_j u\|^2}_{\leq \|u\|^2}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\|A - A_m\| \leq \sup_{j\geq m+1} |\lambda_j|$$

tend vers 0. Notons que le lemme 1.29 donne

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \big\{\lambda_j : j \in \mathbf{N}\big\}$$

et que l'on a par construction $\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \big\{\lambda_j : j \in \mathbf{N}\big\}$.

Bien que les résultats obtenus jusqu'à présent concernent les opérateurs bornés, on peut les transférer à certains opérateurs non bornés.

Définition 2.15. *On dit qu'un opérateur non borné* $(A, D(A)$ *d'un espace de Banach* B *est à résolvante*[2] *compacte s'il existe* $\lambda_0 \in \varrho(A)$ *tel que la résolvante* $R_A(\lambda_0) : B \to B$ *soit compacte.*

Pour un opérateur à résolvante compacte, $\sigma(A) \neq \mathbf{C}$ et A est nécessairement fermé. Si A est à résolvante compacte alors par l'identité de la résolvante

$$R_A(\lambda) = \underbrace{(\mathrm{I} + (\lambda - \lambda_0)R_A(\lambda))}_{\text{borné}} \underbrace{R_A(\lambda_0)}_{\text{compact}},$$

toute autre résolvante pour $\lambda \in \varrho(A)$ est compacte. En particulier, un opérateur autoadjoint est à résolvante compacte si et seulement si $(A+i)^{-1}$ est compacte.

Remarque 2.16. Dans un espace de Banach de dimension infinie, un opérateur borné ne peut pas être à résolvante compacte car si $B = D(A)$, 0 ne peut être dans le spectre de la résolvante. De plus, $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ et si A est à domaine dense $D(A) \subsetneq B$ alors $0 \in \sigma_c(R_A(\lambda_0))$. Si A n'est pas à domaine dense et $D(A) \subsetneq B$ alors $0 \in \sigma\mathrm{red}(A)$.

Lemme 2.17. *Soit* $(A, D(A)$ *un opérateur non borné, soit* $\lambda_0 \in \varrho(A)$ *alors en considérant la résolvante* $R_A(\lambda_0) : B \to B$ *comme un endomorphisme sur* B *d'image contenu dans* $D(A)$*, on a*

$$\sigma(R_A(\lambda_0)) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} : \lambda \in \sigma(A) \right\}$$

et

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda_0 + \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(R_A(\lambda_0)) \setminus \{0\} \right\}.$$

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{C} \setminus \{\lambda_0\} &\to \mathbf{C}^* \\ \lambda &\mapsto \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \end{aligned}$$

est une bijection d'inverse

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbf{C}^* &\to \mathbf{C} \setminus \{\lambda_0\} \\ \lambda &\mapsto \lambda_0 + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

et les relations du lemme prennent la forme

$$\sigma(R_A(\lambda_0)) \setminus \{0\} = \varphi(\sigma(A)), \quad \sigma(A) = \varphi^{-1}\big(\sigma(R_A(\lambda_0)) \setminus \{0\}\big).$$

il suffit donc de prouver la seconde. Or pour tous $\lambda \in \setminus \{\lambda_0\}$ on a

$$\begin{aligned} A - \lambda = A - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda &= (\mathrm{I} - (\lambda - \lambda_0)R_A(\lambda_0))(A - \lambda_0) \\ &= -(\lambda - \lambda_0)\left(R_A(\lambda_0) - \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\right)(A - \lambda_0) \end{aligned}$$

2. On fait un léger abus puisque la résolvante est plutôt une application de B dans $D(A)$.

et par conséquent également

$$\left(R_A(\lambda_0) - \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\right) = -\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(A-\lambda)R_A(\lambda_0).$$

Ce qui prouve pour $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{\lambda_0\}$

$$\varphi(\lambda) \in \sigma(R_A(\lambda_0)) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$$

et donc le lemme. □

De ce lemme et du théorème 2.3, on en déduit le théorème suivant.

Corollaire 2.18. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné à résolvante compacte sur un espace de Banach alors le spectre de A est purement ponctuel*

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$$

et c'est un sous-ensemble discret de $\mathbf{C}$. En outre, les espaces propres correspondants sont de dimension finie.

Si on se place dans un espace de Hilbert H et si on suppose de plus que A est autoadjoint alors

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \mathbf{R}$$

est discret ; il existe donc $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \sigma(A) = \mathbf{R} \cap \varrho(A)$, et la résolvante $R_A(\lambda_0) : H \to H$ est un opérateur compact autoadjoint à laquelle on peut appliquer le théorème 2.10, pour en déduire le théorème spectral suivant sur les opérateurs autoadjoints à résolvante compacte.

Corollaire 2.19. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné à résolvante compacte sur un espace de Hilbert de dimension infinie alors il existe une base hilbertienne $(\psi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de vecteurs propres, et une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de réels qui n'a pas de valeurs d'adhérence.*

Remarque 2.20. Sous les hypothèses du corollaire, l'espace de Hilbert est séparable. On a également

$$\lim |\lambda_k| = \infty$$

et si l'opérateur est borné inférieurement, i.e. il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que

$$\langle Au, u\rangle \geq c\|u\|^2, \quad u \in D(A)$$

alors $\lambda_k \geq c$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $\lim \lambda_k = \infty$.

2.2. **Applications.** À ce stade, on dispose déjà d'un grand éventail d'applications pour des opérateurs compacts ou à résolvante compacte.

2.2.1. *Le laplacien sur un domaine borné.* Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné lisse, on se place dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable, et on considère le laplacien avec condition de Dirichlet

$$D(A) = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}, \quad Au = -\Delta u, \quad u \in D(A)$$

où Δu est à comprendre au sens faible (ou au sens des distributions) pour une fonction $u \in L^2(\Omega)$.

Proposition 2.21. *L'opérateur A est autoadjoint positif.*

Démonstration. L'opérateur A est fermé car si la suite $((u_k, \Delta u_k))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers (u, v) dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ alors $v = \Delta u$ au sens des distributions, et donc $u \in D(A)$ et $v = Au$. Une intégration par parties donne

$$-\int_\Omega \Delta u\, \bar{u}\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x$$

pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Lorsque $u \in D(A)$, comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ pour la norme du gradient, il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\lim \|u - u_k\| + \|\nabla u - \nabla u_k\| = 0$$

et comme

$$-\int_\Omega \Delta u \bar{u}_k\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{u}_k\, \mathrm{d}x$$

en passant à la limite, on obtient

$$\langle Au, u\rangle = \|\nabla u\|^2.$$

Ceci implique que A est positif, et de plus par polarisation de cette égalité

$$\langle Au, v\rangle = \langle \nabla u, \nabla v\rangle$$

pour tous $u, v \in D(A)$, ce qui montrer que A est symétrique. Enfin, on a

$$\langle (A+1)u, u\rangle = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \quad u \in D(A).$$

On en déduit que $(A + 1)$ est surjectif ; soit $f \in L2(\Omega)$ alors la forme linéaire $v \mapsto \langle v, f\rangle$ est continue sur $H^1(\Omega)_0$

$$|\langle v, f\rangle| \leq \|f\|\|v\| \leq \|f\|\big(\|v\| + \|\nabla v\|\big)$$

par le théorème de représentation de Riesz, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\langle v, f\rangle = \langle \nabla v, \nabla u\rangle + \langle v, u\rangle.$$

En se restreignant aux fonctions $v \in C_0^\infty(\Omega)$, on obtient que $-\Delta u = f - u \in L^2(\Omega)$ ce qui prouve que $u \in D(A)$ et

$$Au + u = f.$$

Soit $u \in D(A^*)$, il existe $v \in D(A)$ tel que

$$A^*u + u = Av + v = A^*v + v$$

ce qui implique $(A^* + 1)(u - v) = 0$ et par conséquent

$$u - v \in \ker(A^* + 1) = \operatorname{ran}(A + 1)^\perp = \{0\}$$

on a $u = v \in D(A)$. □

Théorème 2.22 (Rellich)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert lisse alors l'injection J de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

La proposition donne également que $-1 \notin \sigma(A)$ et ainsi,

$$(A+1)^{-1} : H \to D(A) \subset H^1(\Omega), \quad J : H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

et la résolvante $R_A(-1) = (A + 1)^{-1} \circ J : H \to H$ considérée comme un opérateur de H dans H est compacte. Le théorème spectral 2.10 s'applique ;

il existe une suite de réels positifs $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ qui tend vers l'infini, et une base hilbertienne $(\psi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tels que

$$A\psi_k = \lambda_k \psi_k.$$

Notons que 0 n'est pas valeur propre car

$$0 = \langle Au, u\rangle = \|\nabla u\|^2$$

implique $u = 0$. A part quelques cas particuliers, il est illusoire d'obtenir une description beaucoup plus précise du spectre (et des fonctions propres) dans le cas d'un domaine Ω général.

2.2.2. *Au théorème de Peter-Weyl.* Si G est un groupe compact, d'après le théorème de Haar (pour les groupes localement compact), il existe une mesure de probabilité sur G invariante par action du groupe à gauche. On peut donc définir l'intégrale d'une fonction $u \in L^1(G)$

$$\int_G u(g)\,\mathrm{d}g$$

avec la propriété suivante

$$\int_G u(hg)\,\mathrm{d}g = \int_G u(g)\,\mathrm{d}g$$

pour tout $h \in G$. Avec cette mesure dite de Haar, l'espace $L^2(G)$ peut également être défini, et si $K \in L^2(G)$, on considère l'opérateur de convolution

$$T_K u(g) = K * u(g) = \int_G K(h^{-1}g)u(h)\,\mathrm{d}h.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|T_K u(g)|^2 \leq \left(\int_G |K(h^{-1}g)|^2\,\mathrm{d}h\right)\left(\int_G |u(h)|^2\,\mathrm{d}h\right)$$

et en intégrant, par Fubini-Tonelli et par l'invariance de la mesure de Haar sous l'action à gauche de G, on obtient

$$\|T_K u\| \leq \|K\|\|u\|$$

la continuité de T_K sur $L^2(G)$.

Lemme 2.23. *L'opérateur T_K de convolution par un noyau $K \in L^2(G)$ est un opérateur compact, et de plus si l'on note*

$$K^*(g) = \overline{K(g^{-1})}$$

alors on peut calculer l'adjoint

$$T_K^* = T_{K^*}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\langle T_K u, v\rangle &= \iint_{G\times G} K(h^{-1}g)u(h)\overline{v(g)}\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\
&= \int_G u(h)\overline{\left(\int_G \overline{K((g^{-1}h)^{-1})}v(g)\,\mathrm{d}g\right)}\,\mathrm{d}h \\
&= \langle u, T_{K^*}v\rangle.
\end{aligned}$$

et on en tire $T_K^* = T_{K^*}$. L'espace $L^2(G)$ est séparable, on choisit une base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ et on considère l'opérateur de rang fini (donc compact)

$$T_{K,N}u = \sum_{j=1}^{N} \langle T_K u, \psi_j\rangle \psi_j.$$

Pour tout $u \in L^2(G)$ unitaire on a

$$\begin{aligned}\|(T_K - T_{K,N})u\|^2 &= \sum_{j=N+1}^{\infty} |\langle T_K u, \psi_j\rangle|^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} |\langle u, T_{K^*}\psi_j\rangle|^2 \\ &\le \sum_{j=N+1}^{\infty} \|T_{K^*}\psi_j\|^2\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|T_K - T_{K,N}\|^2 \le \sum_{j=N+1}^{\infty} \|T_{K^*}\psi_j\|^2$$

il suffit de montrer que la série

$$\sum_j \|T_{K^*}\psi_j\|^2$$

converge, car dans ce cas T est la limite d'une suite d'opérateurs compacts. Or on a par Fubini et par Parseval

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \|T_{K^*}\psi_j\|^2 &= \int_G \sum_{j=0}^{\infty} \left| \int_G \overline{K(g^{-1}h)}\psi_j(h)\,\mathrm{d}h \right|^2 \mathrm{d}g \\ &= \int_G \underbrace{\|K(g^{-1}\cdot)\|^2}_{=\|K\|^2} \mathrm{d}g = \|K\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi T_K est compact. □

Si l'on choisit un noyau K qui vérifie $K^* = K$ alors T_K est un opérateur autoadjoint compact, et on en déduit

$$L^2(G) = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(T_K)\setminus\{0\}} \ker(T_K - \lambda) \oplus \ker T_K.$$

Ceci est une pierre angulaire de la démonstration du théorème de Peter-Weyl en théorie de représentation des groupes.

Théorème 2.24 (Peter-Weyl)**.** *Soit ϱ une représentation unitaire d'un groupe compact G sur un espace de Hilbert complexe H. Alors H se scinde en une somme directe orthogonale de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de G.*

2.2.3. *L'oscillateur harmonique.* L'espace ambiant est $H = L^2(\mathbf{R}^n)$, on considère l'oscillateur harmonique

$$A = -\Delta + |x|^2$$

de domaine

$$D(A) = \big\{u \in H^2(\mathbf{R}^n) : |x|^2 u \in L^2(\mathbf{R}^n)\big\}.$$

Proposition 2.25. *L'oscillateur harmonique est un opérateur autoadjoint positif (minoré par n) à résolvante compacte.*

La démonstration de cette proposition est basée sur une série de lemmes.

Lemme 2.26. *Pour tout $u \in D(A)$ on a*

$$\langle(-\Delta + |x|^2)u, u\rangle = \|\nabla u\|^2 + \||x|u\|^2$$

ainsi que

$$\langle(-\Delta + |x|^2)u, u\rangle = \|(\nabla - x)u\|^2 + n\|u\|^2.$$

Démonstration. La première égalité est évidente étant donné que

$$\langle -\Delta u, u\rangle = \|\nabla u\|^2$$

pour tout $u \in H^2(\mathbf{R}^n)$. En ce qui concerne la seconde, on a

$$\|(\nabla - x)u\|^2 = \|\nabla u\|^2 + \|xu\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x \cdot \nabla u, u\rangle.$$

De plus, une intégration par parties lorsque $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\langle x \cdot \nabla u, u\rangle = -\langle u, x \cdot \nabla u\rangle - n\|u\|^2$$

et un argument de densité lorsque $u \in D(A)$ donne

$$2\operatorname{Re}\langle x \cdot \nabla u, u\rangle = -n\|u\|^2.$$

Ce qui termine la preuve de la seconde identité. □

Démonstration de la proposition 2.25. Par polarisation de la première égalité du lemme 2.26

$$\langle Au, v\rangle = \langle \nabla u, \nabla v\rangle + \langle xu, xv\rangle, \quad u, v \in D(A)$$

on en déduit le caractère symétrique de l'oscillateur harmonique. La deuxième égalité du lemme 2.26 donne l'injectivité de l'oscillateur harmonique, et implique

$$\|u\| \leq \frac{1}{n}\|Au\|$$

le fait que $\operatorname{ran} A$ est fermée. Notons que le lemme 2.26 implique également

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{n}\|\nabla u\|^2 + \||x|u\|^2. \tag{2.1}$$

Enfin A est surjectif ; soit $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, l'espace $D(A)$ muni du produit scalaire

$$(u|v)_A = \int (1 + |x|^2)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x + \int \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

est un espace de Hilbert, sur lequel la forme linéaire $v \to \langle v, f\rangle$ est continue par (2.1)

$$|\langle v, f\rangle| \leq \|v\|\|f\| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{n}}\|v\|_A.$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $u \in D(A)$ tel que

$$\langle v, f\rangle = (v|u)_A$$

ce qui implique pour $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ que $f = (-\Delta + |x|^2)u$. Ainsi A est inversible et symétrique donc autoadjoint. Montrons que A^{-1} est compact, on considère une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ à support dans la boule de centre l'origine de rayon 2 et qui vaut 1 sur la boule unité fermée, et on pose

$$A_k = \chi(x/k)(-\Delta + |x|^2)^{-1}.$$

Alors

$$\operatorname{ran} A_k \subset \big\{u \in H^1(\mathbf{R}^n) : \operatorname{supp} u \subset B(0, 2k)\big\} \simeq H^1(B(0, 2k))$$

Il en découle que $A_k = J_k A_k$ où $J_k : H^1(B(0, 2k)) \to L^2(B(0, 2k)))$ est l'injection compacte de $H^1(B(0, 2k))$ dans $L^2(B(0, 2k))$ par le théorème de Rellich, et par conséquent que A_k est compact comme opérateur de $L^2(\mathbf{R}^n)$ En outre, comme on a

$$A - A_k = (1 - \chi(x/k))(-\Delta + |x|^2)^{-1}$$

en appliquant le lemme 2.26 à $u = (A - A_k)v$ on obtient

$$\begin{aligned}\||x|u\| &\leq \|(-\Delta + |x|^2)u\| \leq \|v\| + \big\|[-\Delta, \chi(x/k)](-\Delta + |x|^2)^{-1}v\|\\ &\leq \|v\| + C\big\|(-\Delta + |x|^2)^{-1}v\|_{H^1}\\ &\leq M\|v\|\end{aligned}$$

et comme $|x| \geq k$ sur le support de $1 - \chi(\,\cdot\,/k)$

$$\|(A - A_k)v\| = \|u\| \leq k^{-1}\||x|u\| \leq Mk^{-1}\|v\|$$

ce qui implique

$$\|A - A_k\| \leq Mk^{-1}.$$

Comme l'espace $\mathcal{K}(L^2(\mathbf{R}^n)$ est fermé, on en déduit que $A = \lim A_k$ est compact et donc $-\Delta + |x|^2$ à résolvante compacte. □

D'après le théorème 2.10, il existe donc une base hilbertienne de vecteurs propres associées à des valeurs propres réelles de multiplicité finie. Déterminons cette base hilbertienne. Pour la dimension $n = 1$, on veut résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$-\ddot{u} + t^2 u - \lambda u = 0$$

et pour cela, on fait le changement d'inconnu $u = \mathrm{e}^{-t^2/2}v$; comme

$$\mathrm{e}^{t^2/2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{-t^2/2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - t\right)^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + t^2 - 2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1$$

on voit que v vérifie l'équation différentielle

$$-\ddot{v} + 2t\dot{v} - (\lambda - 1)v = 0.$$

Pour résoudre cette équation, on considère les polynômes de Hermite

$$H_k(t) = (-1)^k \mathrm{e}^{t^2} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\big(\mathrm{e}^{-t^2}\big) = \Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2t\Big)^k (1)$$

Notons que l'on a la relation de récurrence

$$H_{k+1} = -\dot{H}_k + 2tH_k.$$

En outre, on a

$$H_{k+1} = (-1)^k \mathrm{e}^{t^2} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\big(2t\mathrm{e}^{-t^2}\big) = 2tH_k - 2kH_{k-1}.$$

Les deux formules précédentes donnent alors

$$\dot{H}_k = 2kH_{k-1}$$

et en dérivant la relation de récurrence et en utilisant cette dernière relation $\dot{H}_{k+1} = (2k+2)H_k$, il en résulte que les polynômes de Hermite vérifient l'équation différentielle ordinaire

$$-\ddot{H}_k + 2t\dot{H}_k - 2kH_k = 0.$$

En conclusion, une solution recherchée est

$$u = H_k(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}$$

avec $\lambda = 2k+1$. Pour $j \neq k$ ces fonctions propres sont associées à des valeurs propres différentes, on a donc automatiquement

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k(t)H_j(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

De plus, en faisant k intégrations par parties, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k^2(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\big(\mathrm{e}^{-t^2}\big)H_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k H_k}{\mathrm{d}t^k}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et commeH_k est un polynôme de degré k et de terme de plus haut degŕe $2^k t^k$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k^2(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2^k k! \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}2^k k!.$$

Les fonctions de Hermite données par

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{4}}\sqrt{\alpha! 2^{[\alpha]}}}\Big(\prod_{k=1}^{n} H_{\alpha_k}(x_k)\Big)\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$$

forment une famille orthonormée de vecteurs propres de l'oscillateur harmonique.

Théorème 2.27. *La famille $(\psi_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^n}$ des fonctions de Hermite est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R}^n)$ de vecteurs propres de l'oscillateur harmonique*

$$\big(-\Delta + |x|^2\big)\psi_\alpha = (2[\alpha]+n)\psi_\alpha.$$

Ainsi, le spectre de l'osciallteur harmonique est-il donné par

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \big\{2k+n : k \in \mathbf{N}\big\} = 2\mathbf{N} + n$$

et chaque valeur propre a multiplicité

$$m_k = \dim\ker(-\Delta + |x|^2 - 2k - n) = \operatorname{card}\big\{\alpha \in \mathbf{N}^n : [\alpha] = k\big\} = \binom{n+k}{k}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $(\psi_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^n}$ est une famille totale. Les polynômes de Hermite forment une base de $\mathbf{C}[t]$ puisqu'ils sont de degré k et de terme de plus haut degré $2^k t^k$. Comme l'espace vectoriel des polynômes $\mathbf{C}[t]$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}, \mathrm{e}^{-t^2/2})$, toute fonction $v \in L^2(\mathbf{R})$ orthogonale à tous les polynômes de Hermite H_k est nulle.

Supposons que $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ soit orthogonale à toutes les fonctions de Hermite alors

$$0 = \int u(x)\psi_{(\alpha',k)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{k!2^k}}\int_{-\infty}^{\infty} v(t)H_k(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

pour tout $\alpha' \in \mathbf{N}^{n-1}$ et tout $k \in \mathbf{N}$ avec

$$v(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{4}}\sqrt{\alpha'!2^{[\alpha']}}}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(x',t)\bigg(\prod_{k=1}^{n-1} H_{\alpha_k}(x_k)\bigg)\mathrm{e}^{-|x'|^2/2}\,\mathrm{d}x'$$

ce qui entraîne

$$v(t) = 0$$

et une récurrence sur la dimension permet d'en déduire $u = 0$. □

Remarquons que l'on peut décomposer l'oscillateur harmonique sous la forme

$$Au = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+n)\sum_{[\alpha]=k}\langle u, \psi_\alpha\rangle\psi_\alpha.$$

et si

$$P_k\psi = \sum_{[\alpha]=k}\langle u, \psi_\alpha\rangle\psi_\alpha$$

désigne la projection orthogonale sur l'espace propre $\ker(A - 2k - n)$ alors

$$A = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+n)P_k.$$

2.3. **Calcul fonctionnel.**

Définition 2.28. *Une mesure borélienne à valeurs dans l'espace des opérateurs $L(H)$ d'un espace de Hilbert est une application sesquilinéaire*

$$\begin{aligned} \mu : H \to H &\to \mathcal{M}(\mathbf{R};\mathbf{C}) \\ (u,v) &\mapsto \mu_{u,v} \end{aligned}$$

à valeurs dans l'espace des mesures boréliennes sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes, vérifiant la propriété de continuité suivante : pour tout $R > 0$ il existe une constante $C_R \geq 0$ telle que pour tout $u, v \in H$

$$|\mu_{u,v}([-R,R])| \leq C_R\|u\|\|v\|.$$

Avec cette définition, pour toute fonction borélienne f à support compacte, l'application

$$\begin{aligned} \ell_{f,u} : H &\to \mathbf{C} \\ v &\mapsto \int f(\lambda) \mathrm{d}\mu_{u,v} \end{aligned}$$

est une forme antilinéaire bornée puisque

$$|\ell_{f,u}(v)| \leq \sup|f|\,|\mu_{u,v}([-R,R])| \leq C_R \sup|f| \|u\| \|v\|.$$

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $T_f(u) \in H$ telle que

$$\overline{\ell_u(v)} = \langle v, T_f(u) \rangle$$

et on peut montrer que $u \to T_f(u)$ est une application linéaire bornée de norme $\leq C_R$. Il est a ;ors légitime d'utiliser la notation

$$\int f(\lambda)\, \mathrm{d}\mu = T_f$$

ce qui justifie le nom de mesure à valeurs dans $L(H)$. On veut construire une telle mesure associée à un opérateur borné A de sorte que l'on puisse développer un calcul fonctionnel qui prenne la forme

$$f(A) = \int f(\lambda) \mathrm{d}\mu_A.$$

Commençons donc par développer un tel calcul fonctionnel avant de costruire cette mesure.

Rappelons que pour une application linéaire continue, on peut définir l'exponentielle

$$\mathrm{e}^{itA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} A^k$$

et que cette application vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{itA} = iA\mathrm{e}^{itA}.$$

Soit alors une fonction $f \in L^1 \cap F(L^1)$, on peut définir

$$f(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \mathrm{e}^{itA}\, \mathrm{d}t$$

qui est une application linéaire bornée vérifiant

$$\|f(A)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int |\widehat{f}(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Notons que $f \in L^1$ implique $\widehat{f} \in C^0(\mathbf{R})$ et que l'intégrale précédente est donc une intégrale de Riemann généralisée à valeurs dans l'espace de Banach $L(H)$. En outre, on a les relations suivantes [3]

$$(fg)(A) = f(A)g(A), \quad f(A)^* = \bar{f}(A) \tag{2.2}$$

3. Si $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont dans L^1 alors $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$ est dans L^1 et comme cela implique $g \in L^\infty$, on a également $fg \in L^1$ si $f \in L^1$.

pour tous $f, g \in L^1 \cap F(L^1)$. En effet, les propriétés de la transformée de Fourier et de l'exponentielle donnent

$$
\begin{aligned}
(fg)(A) &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f} * \widehat{g}(t) \mathrm{e}^{itA} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \iint \widehat{f}(t-s) \widehat{g}(s) \mathrm{e}^{i(t-s)A} \mathrm{e}^{isA} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = f(A) g(A)
\end{aligned}
$$

ainsi que

$$
f(A)^* = \frac{1}{2\pi} \int \overline{\widehat{f}(t)} \mathrm{e}^{-itA} \, \mathrm{d}t = \bar{f}(A).
$$

Soit $u \in H$, on considère maintenant l'application

$$
C_0^\infty(\mathbf{R}) \ni f \mapsto \langle f(A)u, u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(t) \langle \mathrm{e}^{-itA} u, u \rangle \, \mathrm{d}t.
$$

Montrons que c'est une distribution : pour tout $f \in C^\infty(0)(\mathbf{R})$ on a

$$
\begin{aligned}
|\langle f(A)u, u \rangle| \leq \|f(A)\| \, \|u\|^2 &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int |\widehat{f}| \, \mathrm{d}t \right) \|u\|^2 \\
&\leq C \left(\frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \right) \sup_{0 \leq k \leq 2} \sup |f^{(k)}| \, \|u\|^2.
\end{aligned}
$$

Lemme 2.29. *Le support de la distribution définie précédemment est contenu dans $\sigma(A)$. En outre, c'est une distribution positive, en particulier il existe une constante $C \geq 0$ tel que pour toute fonction $f \in C_0^0(\mathbf{R})$ on a*

$$
|\langle f(A)u, u \rangle| \leq C \sup |f| \, \|u\|^2.
$$

C'est donc une mesure borélienne.

Démonstration. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$
\int \chi^2(t) \, \mathrm{d}t = 1
$$

Notons

$$
\theta = \chi^2, \quad \theta_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \chi^2(\varepsilon^{-1} t).
$$

On a alors par le théorème de convergence dominée

$$
\begin{aligned}
\langle f(A)u, u \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int \widehat{\theta}_\varepsilon(t) \widehat{f}(t) \langle \mathrm{e}^{itA} u, u \rangle \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \iint \widehat{\theta}(\varepsilon t) f(\lambda) \langle \mathrm{e}^{it(A-\lambda)} u, u \rangle \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
$$

et après changement de variables

$$
\langle f(A)u, u \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \iint \widehat{\theta}(t) f(\lambda) \mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}(A-\lambda)} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\lambda
$$

Supposons que le support de f ne rencontre pas $\sigma(A)$: on a alors $\operatorname{supp} f \subset \varrho(A) \cap \mathbf{R}$ et on peut écrire

$$
\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}(A-\lambda)} = -i\varepsilon R_A(\lambda) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{it(A-\lambda)}
$$

ce qui donne après deux intégration par parties

$$\langle f(A)u,u\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{2\pi i}\iint \widehat{\theta}''(t)f(\lambda)\langle \mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}(A-\lambda)}R_A(\lambda)u,u\rangle\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Ainsi la distribution est à support dans $\sigma(A)$. Montrons maintenant qu'elle est positive : soit $f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ à valeurs positives alors on a

$$\begin{aligned}\langle f(A)u,u\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int f(\lambda)\Big(\int \widehat{\theta}_\varepsilon(t)\langle \mathrm{e}^{it(A-\lambda)}u,u\rangle\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int f(\lambda)\langle \theta_\varepsilon(A-\lambda)u,u\rangle\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int \underbrace{f(\lambda)\|\chi(\varepsilon^{-1}(A-\lambda))u\|^2}_{\geq 0}\,\mathrm{d}\lambda \geq 0.\end{aligned}$$

Une distribution positive à support compact est une mesure borélienne positive ; soit $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ qui vaut 1 sur $[-\|A\|,\|A\|]$ alors pour tout $f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ à valeurs réelles, on a

$$f = f\psi + f(1-\psi),\quad \sup|f|\,\psi - f\psi \text{ est à valeurs positives}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\langle f(A)u,u\rangle &= \langle (f\psi)(A)u,u\rangle + \underbrace{\langle ((1-\psi)f)(A)u,u\rangle}_{=0}\\ &\leq \sup|f|\,\langle \psi(A)u,u\rangle \leq C_\psi \sup|f|\|u\|^2.\end{aligned}$$

En changeant f en $-f$, on obtient donc la majoration

$$|\langle f(A)u,u\rangle| \leq C\sup|f|\,\|u\|^2.$$

Ce qui démontre que c'est une mesure borélienne positive. □

Théorème 2.30. *Soit $A\in\mathcal{L}(H)$ un endomorphisme continu autoadjoint, il existe une mesure borélienne μ à valeurs opérateurs telle que*

(*i*) *$\mu_{u,v}$ est à support dans le spectre de A,*

(*ii*) $\mathrm{Id} = \int \mathrm{d}\mu,\quad A = \int \lambda\,\mathrm{d}\mu,$

(*iii*) $P(A) = \int P(\lambda)\,\mathrm{d}\mu$ *pour tous les polynômes $P\in\mathbf{C}[\lambda]$,*

(*iv*) *pour tout borélien $\Omega\subset\mathbf{R}$*

$$P_\Omega = 1_\Omega(A) = \int_\Omega \mathrm{d}\mu$$

est une projection orthogonale.

Remarque 2.31. Si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ est une fonction développable en série entière de rayon de convergence $R>\|A\|$ alors

$$f(A) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!}A^k$$

puisque si l'on note P_N le polynôme de Taylor de f de degré N alors

$$P_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k$$

et de plus

$$\langle f(A)u - P_N u, v\rangle = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} f(\lambda) - P_N(\lambda) \mathrm{d}\mu_{u,v}$$

implique que la limite de

$$\|f(A)u - P_N u\| \leq C_{\|A\|} \sup_{[-\|A\|,\|A\|]} |f - P_N| \|u\|$$

est nulle.

Démonstration. La mesure borélienne $\mu_{u,v}$ (à valeurs complexes) est obtenue par polarisation de la mesure

$$\mu_{u,u} : f \mapsto \langle f(A)u, u\rangle$$

construite par le calcul fonctionnel. Montrons les propriétes de cette mesure. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ qui vaut 1 sur $[-1, 1]$ et notons

$$\chi_k = \chi(\,\cdot\,/k).$$

Alors pour $k \geq \|A\|$ on a

$$\langle \chi_k(A)u, v\rangle = \int \chi_k(\lambda)\, \mathrm{d}\mu_{u,v} = \int \mathrm{d}\mu_{u,v}$$

et comme

$$\langle u, v\rangle - \langle \chi_k(A)u, v\rangle = \frac{k}{2\pi} \int \widehat{\chi}(kt) \langle (\mathrm{I} - \mathrm{e}^{-itA})u, v\rangle \,\mathrm{d}t$$

on en tire

$$|\langle u, v\rangle - \langle \chi_k(A)u, v\rangle| \leq \|A\| \|u\| \|v\| \frac{1}{2\pi k} \int |t\widehat{\chi}(t)| \,\mathrm{d}t$$

ainsi en passant à la limite

$$\langle u, v\rangle = \int \mathrm{d}\mu_{u,v}.$$

De manière similaire

$$\langle A^j \chi_k(A)u, v\rangle = \int \lambda\chi_k(\lambda)\, \mathrm{d}\mu_{u,v} = \int \lambda^j \,\mathrm{d}\mu_{u,v}$$

et comme on a montré

$$\langle A^j u, v\rangle = \lim \langle \chi_k(A) A^j u, v\rangle = \lim A^j \chi_k(A)u, v\rangle$$

on obtient la deuxième identité ainsi que celle sur les polynômes. Enfin, (2.2) donne également

$$P_\Omega^* = 1_\Omega(A) = P_\Omega$$
$$P_\Omega^2 = 1_\Omega^2(A) = 1_\Omega(A) = P_\Omega.$$

Ce qui montre les propiétés de la mesure. $\square$

Remarque 2.32. Si un opérateur borné B commute avec A alors B commute avec e^{itA} et il s'en suit que B commute avec $f(A)$ par construction du calcul fonctionnel.

Exemple 2.33. L'opérateur de multiplication par une potentiel borné réel

$$Au = qu$$

est autoadjoint et la mesure spectrale est donnée par

$$\mu_{u,v} = q^*(u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x).$$

Pour un multiplicateur de Fourier

$$Au = F^{-1}(mFu)$$

avec m bornée à valeurs réelles, la mesure est

$$\mu_{u,v} = m^*(\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi).$$

Lemme 2.34. *Le calcul fonctionnel donne*

$$\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A)).$$

Démonstration. Si $\mu_0 \in \mathbf{C} \setminus f(\sigma(A))$ alors la fonction

$$\frac{\chi(\lambda)}{f(\lambda) - \mu_0}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ vaut 1 sur le compact $\sigma(A)$, est lisse à support compact et

$$B = \int \frac{\chi(\lambda)}{f(\lambda) - \mu_0}\,\mathrm{d}\mu$$

est un inverse de $f(A) - \lambda_0$ puisque

$$(f(A) - \lambda_0)B = \int \chi(\lambda)\,\mathrm{d}\mu = \int \mathrm{d}\mu = \mathrm{Id}.$$

Ce qui prouve que $\mu_0 \in \varrho(f(A))$. $\square$

3. Théorème spectral pour les opérateurs non bornés

3.1. **Opérateurs unitaires.** On s'intéresse d'abord à une autre catégorie d'opérateurs bornés, les opérateurs unitaires

$$\mathrm{U}(H) = \left\{U \in \mathcal{L}(H) : U^{-1} = U^*\right\}$$

$\mathrm{U}(H)$ est un groupe et on note

$$\mathfrak{u}(H) = \left\{A \in \mathcal{L}(H) : A^* = -A\right\}$$

l'algèbre de Lie correspondante.

Lemme 3.1. *Le spectre d'un opérateur unitaire est contenu dans le cercle unité*

$$\sigma(U) \subset \partial D(0,1) = \mathbf{U}.$$

Démonstration. Comme $\|U\| = 1$, le spectre est contenu dans le disque unité fermé. Il est clair que $0 \in \varrho(U)$. Soit $\lambda \in D(0,1) \setminus \{0\}$, comme U^* est unitaire

$$\lambda^{-1} \in \mathbf{C} \setminus \overline{D(0,1)} \subset \varrho(U^*)$$

l'opérateur

$$U - \lambda = U(\mathrm{I} - \lambda U^*) = -\lambda U(U^* - \lambda^{-1})$$

est inversible, ce qui implique $\lambda \in \varrho(U)$. □

On considère maintenant l'application exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{u}(H) &\to \mathrm{U}(H) \\ i\Theta &\mapsto \mathrm{e}^{i\Theta} \end{aligned}$$

reliant l'algèbre de Lie et le groupe des applications unitaires

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{iA})^* \mathrm{e}^{iA} &= \mathrm{e}^{-iA}\mathrm{e}^{iA} = \mathrm{I} \\ \mathrm{e}^{iA}(\mathrm{e}^{iA})^* &= \mathrm{e}^{iA}\mathrm{e}^{-iA} = \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Théorème 3.2 (Surjectivité de l'exponentielle)**.** *Pour tout opérateur unitaire $U \in \mathrm{U}(H)$, il existe un opérateur non autoadjoint $i\Theta \in \mathfrak{u}(H)$ tel que*

$$U = \mathrm{e}^{i\Theta}, \quad \|\Theta\| \le \pi.$$

Démonstration. On décompose l'opérateur U en sa partie auto et antiadjointe

$$U = A + iB, \quad A = \operatorname{Re} U = \frac{U + U^*}{2}, \quad , \quad B = \operatorname{Im} U = \frac{U - U^*}{2i}$$

et comme on a

$$\begin{aligned} U^*U &= A^2 + B^2 + i[A, B] = \mathrm{I} \\ UU^* &= A^2 + B^2 - i[A, B] = \mathrm{I} \end{aligned}$$

on en déduit

$$A^2 + B^2 = \mathrm{I}, \quad [A, B] = 0.$$

En outre, comme on a

$$\|A\| \le \|U\| = 1, \quad \|B\| \le \|U\| = 1$$

les spectres de A et B sont contenus dans l'intervalle $[-1, 1]$ et on peut considérer par le calcul fonctionnel [4]

$$C = \arccos A, \quad D = \sin C.$$

Comme B commute avec A, B commute avec C et D. On a alors

$$A^2 + D^2 = \cos^2 C + \sin^2 C = \mathrm{I}$$

et ainsi $D^2 = B^2$. On note alors P la projection orthogonale sur $\ker(B - D)$, montrons que

$$B = (2P - \mathrm{I})D = (2P - \mathrm{I}) \sin C.$$

En effet, on a

$$(B - D)(B + D) = 0$$

4. Dans ce cas précis, on peut aussi utiliser les développements en séries entières.

ce qui implique

$$\operatorname{ran}(B+D) \subset \ker(B-D) = \operatorname{ran} P$$

et donc [5]

$$2PDu = P(B+D)u - \underbrace{P(B-D)u}_{=0} = (B+D)u.$$

De plus, $\mathrm{I} - 2P$ commute avec C car $B - D$ commute avec C. On pose alors

$$\Theta = (\mathrm{I} - 2P) \arccos A = \arccos A\, (\mathrm{I} - 2P).$$

Comme

$$(2P - \mathrm{I})^2 = 4P + \mathrm{I} - 4P = \mathrm{I}$$

on en déduit

$$\Theta^2 = C^2$$

et ainsi

$$\cos\Theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Theta^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{C^2k}{(2k)!} = \cos C = A$$

et de même

$$\begin{aligned} \sin\Theta &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Theta^{2k}}{(2k+1)!}\Theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{C^{2k}}{(2k+1)!} C(\mathrm{I} - 2P) \\ &= \sin C(I - 2P) = D(\mathrm{I} - 2P) = A. \end{aligned}$$

Ceci implique $\mathrm{e}^{i\Theta} = \cos\Theta + i \sin\Theta = A$. $\square$

Corollaire 3.3. *Pour tout opérateur unitaire $U \in \mathrm{U}(H)$, il existe une mesure à valeurs opérateurs μ à support dans $[-\pi, \pi]$ telle que*

(*i*) $\mathrm{Id} = \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{d}\mu, \quad U = \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{i\theta}\, \mathrm{d}\mu,$

(*ii*) $P(U) = \int P(\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{d}\mu$ *pour tous les polynômes* $P \in \mathbf{C}[\lambda]$.

Exemple 3.4. Transformation de Fourier : l'opérateur

$$Uu(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} u(x)\, \mathrm{d}x$$

est unitaire

$$U^*U = UU^* = \mathrm{I}.$$

Le spectre est ponctuel

$$\sigma(U) = \sigma_{\mathrm{p}}(U) = \{1, i, -i, -1\}.$$

En effet, si l'on note ψ_α les fonctions de Hermite utilisées dans l'analyse spectrale de l'oscilateur harmonique. On a

$$U\psi_\alpha(\xi) = i^{[\alpha]}\psi_\alpha(\xi).$$

5. Notons que l'on a $(P(B-D))^* = (B-D)P = 0$ donc $(B-D)P = 0$.

En effet par tensorisation, il suffit de le vérifier en dimension $n = 1$, or on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-it\tau}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-it\tau}\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+2t\Big)^k(1)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-it\tau}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+t\Big)^k\big(\mathrm{e}^{-t^2/2}\big)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big(-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+i\tau\Big)^k\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\\ &= i^k\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+2\tau\Big)^k(1)\end{aligned}$$

ce qui signifie

$$U(H_k e^{-t^2/2}) = i^k H_k \mathrm{e}^{-t^2/2}$$

et ainsi les fonctions de Hermite sont fonctions propres. Les projecteurs sur les espaces propres sont donnés par

$$\pi_{i^p} f = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{[\alpha]=p+4k}\langle f,\psi_\alpha\rangle\psi_\alpha,\quad p=0,1,2,3$$

et la mesure spectral prend la forme d'une mesure discrète

$$\mu_{\psi,\psi} = \delta_0\langle\pi_0\psi,\psi\rangle + \delta_{\pi/2}\langle\pi_1\psi,\psi\rangle + \delta_\pi\langle\pi_2\psi,\psi\rangle + \delta_{-\pi/2}\langle\pi_3\psi,\psi\rangle.$$

3.2. **Transformation de Cailey.** Soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné fermé autoadjoint. On cherche une transformation qui envoie l'axe réel sur le cercle unité $\mathbf{U} = \partial D(0,1)$ de sorte que

$$\sigma(h(A)) = h(\sigma(A))$$

permettant donc de transformer un opérateur L'homographie $h : \mathbf{R} \to \mathbf{U}\setminus\{1\}$ suivante

$$h(t) = \frac{t-i}{t+i},\quad t\in\mathbf{R}$$

de réciproque $h^{-1} : \mathbf{U}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$

$$h^{-1}(u) = -i\frac{u+1}{u-1},\quad u\in\mathbf{U}$$

convient. On peut alors considérer

$$U = h(T) = (T-i)(T+i)^{-1}.$$

Lemme 3.5. *Si T est un opérateur fermé autoadjoint alors U est un opérateur unitaire tel que $1 \notin \sigma(U)$.*

Démonstration. Comme T est autoadjoint, $i \in \varrho(A)$ et l'expression de U fait sens. On a alors en posant $u = (T+i)^{-1}v \in D(T)$

$$\begin{aligned}\|Uv\|^2 = \|(T-i)u\|^2 &= \|Tu\|^2 + \|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\underbrace{i\langle Tu,u\rangle}_{\in i\mathbf{R}}\\ &= \|Tu\|^2 + \|u\|^2 = \|(T+i)u\|^2 = \|v\|^2\end{aligned}$$

ce qui implique $U^*U = \mathrm{I}$. Comme de plus U est inversible d'inverse

$$U^{-1} = (T+i)(T-i)^{-1}$$

on en déduit $U^* = U^{-1}$ et donc U unitaire. Enfin comme

$$U\psi = \psi$$

implique

$$(T-i)^{-1}\psi = (T+i)^{-1}\psi$$

ou encore

$$(T+i)\psi = (T-i)\psi \quad \text{i.e.} \quad \psi = 0$$

on en déduit $1 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(U)$. □

Inversement pour tout $U \in \mathrm{U}(H)$ opérateur unitaire tel que $1 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(U)$ on peut construire

$$T = -i(U+1)(U-1)^{\dagger}$$

où $(U-1)^{\dagger}$ est l'opérateur non borné défini dans l'exemple 1.2 de domaine

$$D(U-1)^{\dagger} = \operatorname{ran}(U-1).$$

Lemme 3.6. *Soit $U \in \mathrm{U}(H)$ opérateur unitaire tel que $1 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(U)$ alors T est un opérateur non borné de domaine $\operatorname{ran}(U-1)$ est autoadjoint.*

Démonstration. Montrons d'abord que T est symétrique : on a

$$(U^*+1)(U-1) = U - U^* = -(U^*-1)(U-1)$$

et par conséquent pour tout $u = (U-1)f \in \operatorname{ran} T$ et $v = (U-1)g \in \operatorname{ran} T$

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= -i\langle (U+1)f, v\rangle = -i\langle f, (U^*+1)(U-1)g\rangle \\ &= i\langle f, (U^*-1)(U+1)g\rangle = \langle (U-1)f, -i(U+1)g\rangle \\ &= \langle u, Tv\rangle.\end{aligned}$$

Pour obtenir le caractère autoadjoint, on calcule

$$\begin{aligned}T + i &= -2i(U-1)^{\dagger} \\ T - i &= -2iU(U-1)^{\dagger}\end{aligned}$$

et ces opérateurs sont surjectifs. □

On suppose maintenant que T est donné et que U est donné par la transformée de Cailey

$$U = (T-i)(T+i)^{-1}$$

alors

$$\begin{aligned}U - \mathrm{I} &= (T - i - T - i)(T+i)^{-1} = -2i(T+i)^{-1} \\ U + \mathrm{I} &= (T - i + T + i)(T+i)^{-1} = 2T(T+i)^{-1}\end{aligned}$$

et par conséquent

$$D(U-\mathrm{I})^{\dagger} = \operatorname{ran}(U-\mathrm{I}) = D(T)$$

et en outre

$$(U+\mathrm{I})(U-\mathrm{I})^{-\dagger} = iT.$$

Par conséquent, on peut retrouver T sous la forme

$$T = -i(U + \mathrm{I})(U - \mathrm{I})^{\dagger}.$$

Lemme 3.7. *Les spectres de T et U sont liés par la relation*

$$\sigma(U) \setminus \{1\} = h(\sigma(T)).$$

Notons que si T n'est pas borné $D(T) \neq H$ — ce qui est le cas lorsque l'on doit utiliser la transformée de Cailey — alors $U - \mathrm{I}$ n'est pas surjectif

$$\operatorname{ran}(U - \mathrm{I}) = D(T)$$

et 1 est forcément dans le spectre continu de T (car 1 n'est pas valeur propre et T est autoadjoint)

$$1 \in \sigma_{\mathrm{c}}(T).$$

Démonstration. Comme $h : \mathbf{R} \to \mathbf{U} \setminus \{1\}$ est une bijection, il suffit de montrer

$$\varrho(U) \cap \mathbf{U} \setminus \{1\} = h(\varrho(T) \cap \mathbf{R}).$$

Soit $\lambda \in \mathbf{U} \setminus \{1\}$ alors

$$U - \lambda = ((1 - \lambda)T - i(1 + \lambda))(T + i)^{-1} = (1 - \lambda)(T - h^{-1}(\lambda))(T + i)^{-1}$$

donc $U - \lambda$ est inversible si et seulement si $T - h^{-1}(\lambda)$ est inversible. □

3.3. **Calcul fonctionnel et groupes.** On veut à présent construire une mesure spectrale pour un opérateur autoadjoint $(T, D(T))$ non borné. On considère sa transformée de Cailey $U \in \mathrm{U}(H)$ et la mesure spectrale $\nu : H \times H \to \mathcal{M}([-\pi, \pi], \mathbf{C})$ de son opposé $-U$

$$\langle Uu, v \rangle = -\int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{i\theta} \, \mathrm{d}\nu_{u,v}.$$

Lemme 3.8. *Pour tout $u \in D(T)$, on a la relation*

$$\langle Tu, u \rangle = -2 \operatorname{Im}\langle Uf, f \rangle$$

où $f = (U - I)^{\dagger} u = \frac{i}{2}(T + i)u$.

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} \langle Tu, u \rangle = -i\langle (U + \mathrm{I})f, (U - \mathrm{I})f \rangle &= -i\big(\underbrace{\|Uf\|^2 - \|f\|^2}_{=0} - 2i \operatorname{Im}\langle Uf, f \rangle\big) \\ &= -2 \operatorname{Im}\langle Uf, f \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne la relation annoncée. □

De cette relation, on tire par le calcul fonctionnel

$$\langle Tu, u \rangle = 2 \int_{[-\pi,\pi]} \sin\theta \, \mathrm{d}\nu_{f,f} = 4 \int_{[-\pi,\pi]} \tan\frac{\theta}{2} \cos^2\frac{\theta}{2} \, \mathrm{d}\nu_{f,f}.$$

La relation

$$4\cos^2\frac{\theta}{2} = (e^{-i\theta} + 1)(\mathrm{e}^{-i\theta} + 1)$$

implique par le calcul fonctionnel

$$4\int_{[-\pi,\pi]} g(\mathrm{e}^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\nu_{f,f} = \langle (U^*+\mathrm{I})g(U)(U+\mathrm{I})f,f\rangle = \langle g(U)u,u\rangle$$
$$= \int_{[-\pi,\pi]} g(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\nu_{u,u}$$

et par conséquent

$$4\cos^2\frac{\theta}{2}\,\nu_{f,f} = \nu_{u,u}.$$

Ainsi, on obtient

$$\langle Tu,u\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} \tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\nu_{u,u}.$$

Remarque 3.9. Notons que l'on a

$$h^{-1}(-\mathrm{e}^{i\theta}) = i\frac{1-\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{i\theta}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

et donc la formule précédente prend la forme

$$\langle Tu,u\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} h^{-1}(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\nu_{u,u}.$$

ce qui est cohérent avec le calcul fonctionnel pour l'opérateur unitaire U.

Lemme 3.10. *L'ensemble $\{-\pi,\pi\}$ est de mesure nulle pour la mesure $\nu_{u,u}$ lorsque $u \in D(T)$.*

Démonstration. Supposons que $\nu_{u,u}(\{\pi\}) > 0$. Souvenons-nous que ν est la mesure spectrale de Θ où $U = \mathrm{e}^{i\Theta}$, posons $\Omega_\varepsilon = [\pi-\varepsilon,\pi]$, on a alors

$$\langle P_{\Omega_\varepsilon}u,u\rangle = \int_{[\pi-\varepsilon,\pi]} \mathrm{d}\nu_{u,u} \geq \nu_{u,u}(\{\pi\}) > 0$$

et en outre

$$\|(U-1)P_{\Omega_\varepsilon}u\|^2 = \int_{[\pi-\varepsilon,\pi]} |\mathrm{e}^{i\theta}+1|^2\,\mathrm{d}\nu_{u,u} \leq \sup_{[\pi-\varepsilon,\pi]} |\mathrm{e}^{i\theta}+1|^2$$

ce qui signifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|(U-1)P_{\Omega_\varepsilon}u\| = 0.$$

Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. La suite $(u_{\varepsilon_k} = P_{\Omega_{\varepsilon_k}})_{k\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $v \in H$ qui vérifie

$$\langle v,u\rangle = \lim\langle u_{\varepsilon_k},u\rangle \geq \nu_{u,u}(\{\pi\}) > 0$$

et en outre pour tout $w \in H$

$$\langle (U-\mathrm{I})v,w\rangle = \langle v,(U^*-\mathrm{I})w\rangle = \lim\langle u_{\varepsilon_k},(U^*-\mathrm{I})w\rangle$$
$$= \lim\langle (U^*-\mathrm{I})u_{\varepsilon_k},w\rangle = 0$$

ce qui signifie que $v \in H\setminus\{0\}$ est vecteur propre de $U-\mathrm{I}$, et donc $1 \in \sigma_p(U)$, ce qui est faux. Le raisonnement est identique pour $-\pi$. $\square$

On peut alors faire un changement de variable : on considère le difféomorphisme

$$\begin{aligned}\kappa :]-\pi,\pi[&\to \mathbf{R}\\ \theta &\mapsto \tan\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

de bijection réciproque

$$\begin{aligned}\kappa^{-1} : \mathbf{R} &\to]-\pi,\pi[\\ \lambda &\mapsto 2\arctan\lambda\end{aligned}$$

de sorte que si l'on considère la mesure

$$\mu_{u,v} = (\kappa^{-1})^* \nu_{u,v} \tag{3.1}$$

on a la formule

$$\langle Tu, u\rangle = \int \lambda \,\mathrm{d}\mu_{u,u}.$$

En outre, on a

$$\int \mathrm{d}\mu_{u,v} = \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{d}\nu_{u,v} = \langle u, v\rangle.$$

Théorème 3.11. *Soit $(T, D(T))$ un opérateur autoadjoint, il existe une mesure borélienne μ à valeurs opérateurs telle que*

(i) *$\mu_{u,u}$ est une mesure positive et pour tous $u, v \in D(A)$, la mesure $\mu_{u,v}$ est à support dans $\sigma(T)$,*

(ii) $\mathrm{Id} = \int \mathrm{d}\mu, \quad \langle Tu, v\rangle = \int \lambda\,\mathrm{d}\mu_{u,v}$ *pour tous $u, v \in D(T)$,*

(iii) *pour tout borélien $\Omega \subset \mathbf{R}$ borné*

$$P_\Omega = 1_\Omega(T) = \int_\Omega \mathrm{d}\mu$$

est une projection orthogonale.

Démonstration. Le troisième point est une conséquence de la proposition qui suit, et nous avons déjà établi le deuxième. Il suffit de montrer que la mesure donnée par (3.1) est à support dans le spectre de T. Or on a pour $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$\int f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{u,v} = \int_{]-\pi,\pi[} f\circ\kappa^{-1}(\theta)\,\mathrm{d}\nu_{u,v} = \int_{]-\pi,\pi[} f\circ h^{-1}(-\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\nu_{u,v}.$$

Soit $\lambda_0 \in \varrho(T)\cap\mathbf{R}$, notons $\theta_0 = \kappa^{-1}(\lambda_0) \in]-\pi,\pi[$ alors $-\mathrm{e}^{i\theta_0} = -h(\lambda_0) \in \mathbf{U}\setminus\{-1\}$ n'est pas dans le spectre de $-U$ d'après le lemme **??**. Par construction $-U = \mathrm{e}^{i\Theta}$, montrons que θ_0 ne peut être dans le spectre de Θ. En partant de l'égalité

$$U + \mathrm{e}^{i\theta_0} = -(\mathrm{e}^{i\Theta} - \mathrm{e}^{i\theta_0}) = -i\mathrm{e}^{i\theta_0}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{(k+1)!}(\Theta-\theta_0)^{k-1}\Big)(\Theta-\theta_0)$$

on obtient que $\Theta - \theta_0$ est inversible d'inverse

$$(\Theta - \theta_0)^{-1} = -i\mathrm{e}^{i\theta_0}\big(U + \mathrm{e}^{i\theta_0}\big)^{-1}\bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{(k+1)!}(\Theta - \theta_0)^{k-1}\bigg).$$

Supposons que le support de f soit dans un voisinage de $\lambda_0 \in \varrho(T) \cap \mathbf{R}$ alors le support de $f \circ \kappa^{-1}(\lambda_0)$ est dans un voisinage de θ_0 et avec les propriétés de la mesure ν de Θ, on a

$$\int f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{u,v} = 0$$

ce qui prouve que λ_0 n'est pas dans le support de $\mu_{u,v}$. □

Proposition 3.12. *Soit $f \in L^\infty(\mathbf{R})$, alors*

$$f(T) = \int f(\lambda)\mathrm{d}\mu$$

définit un opérateur borné de H. Il est autoadjoint si f est à valeurs réelles car $f(T)^* = \bar{f}(T)$ et de plus

$$(fg)(T) = f(T)g(T).$$

Démonstration. L'opérateur $f(T)$ est défini par la formule

$$\langle f(T)u, v\rangle = \int f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{u,v}.$$

En particulier, on a

$$|\langle f(T)u, u\rangle| \leq \int |f(\lambda)|\,\mathrm{d}\mu_{u,u} \leq \|f\|_\infty \|u\|^2.$$

Par polarisation $f(T)$ est un opérateur borné. En outre, on a

$$\langle f(T)u, v\rangle = \overline{\int \bar{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{v,u}} = \overline{\langle \bar{f}(T)v, u\rangle} = \langle u, \bar{f}(T)v\rangle$$

et ainsi $f(T)^* = \bar{f}(T)$. Enfin, on a

$$\langle (fg)(T)u, v\rangle = \int f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{u,v}$$

et il suffit donc de montrer que

$$g(\lambda)\mu_{u,v} = \mu_{g(T)u,v}$$

ce qui est une conséquence de

$$g \circ \kappa^{-1}(\theta)\nu_{u,v} = g \circ h^{-1}(-\mathrm{e}^{i\theta})\nu_{g(U)u,v}$$

et provient des propriétés de la mesure ν de Θ puisque

$$g(U) = g(\mathrm{e}^{i\Theta}).$$

Le calcul fonctionnel découle sur T donc de celui sur Θ. De manière similaire, lorsque $u \in D(T)$ et $v \in H$

□

Avec la mesure spectrale et le calcul fonctionnel associé, on peut définir
$$U_t = e^{itA} = \int \mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{d}\mu$$
lorsque A est un opérateur non borné autoadjoint. Notons que l'on ne peut avoir une définition par série car le fait que l'opérateur A ait un domaine ne pemet pas de considérer les puissances successives A^k (qui ont elles-même un domaine peut-être distinct de celui de A. La famille $(U_t)_{t\in\mathbf{R}}$ est un groupe unitaire à un paramètre
$$U_tU_s = U_{t+s}, \quad U_t^{-1} = U_{-t} = U_t^*.$$

Théorème 3.13. *Soit $f \in D(A)$, alors la fonction $u(t) = U_tf$ déterminée par la formule*
$$\langle u(t), v\rangle = \int \mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{d}\mu_{f,v}$$
est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et vérifie l'équation de Schrödinger
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = iAu(t) \\ u(0) = f \end{cases}.$$

Démonstration. Commençons par montrer que lorsque $f \in D(A)$
$$\int \lambda^2 \,\mathrm{d}\mu_{f,f} < +\infty.$$
Pour cela, on considère, la fonction $\chi_R \in L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbf{R})$
$$\chi_R(\lambda) = 1_{[-R,R]}(\lambda)\lambda$$
pour laquelle, on a
$$\chi_R(A)u = P_{[-R,R]}Au$$
ce qui entraîne
$$\|\chi_R(A)u\| \le \|Au\|.$$
Le calcul fonctionnel donne également
$$\begin{aligned}\int_{[-R,R]} \lambda^2 \,\mathrm{d}\mu_{f,f} &= \langle \chi_R(A)Au, u\rangle = \langle \chi_R(A)u, Au\rangle \\ &\le \|Au\|\|\chi_R(A)u\| \le \|Au\|^2.\end{aligned}$$
ce qui donne l'intégrabilité souhaitée. Il est clair que $t \to u(t)$ est continue par le théorème de continuité des intégrales à paramètre. En outre, on a
$$\begin{aligned}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - iAu(t)\right\|^2 &= \int \frac{|\mathrm{e}^{i\lambda(t+h)} - \mathrm{e}^{i\lambda t} - i\lambda h\mathrm{e}^{i\lambda t}|^2}{h^2}\mathrm{d}\mu_{f,f} \\ &= \int \frac{|\mathrm{e}^{i\lambda h} - 1 - i\lambda h|^2}{h^2}\mathrm{d}\mu_{f,f} \\ &\le \frac{h^2}{2}\int \lambda^2 \,\mathrm{d}\mu_{f,f}\end{aligned}$$
ce qui montre la dérivabilité de u et l'équation différentielle. $\square$

3.4. **Exemple du laplacien sur $\mathbf{R}^n$.** Si l'on considère $H = L^2(\mathbf{R}^n)$, l'opérateur $A = -\Delta$ de domaine $D(A) = H^2(\mathbf{R}^n)$ défini par

$$Au = -\Delta u = F^{-1}(|\xi|^2 \widehat{u})$$

est autoadjoint. Calculons sa mesure spectrale : soit $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset D(A)$, par Plancherel

$$\langle Au, v\rangle = (2\pi)^{-n} \int |\xi|^2 \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty \lambda\left(\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{S^{n-1}} \widehat{u}(\lambda\omega)\overline{\widehat{u}(\lambda\omega)}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\lambda.$$

La mesure $\mu_{u,v}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{S^{n-1}} \widehat{u}(\lambda\omega)\overline{\widehat{v}(\lambda\omega)}\,\mathrm{d}\omega.$$

Si l'on note $\Phi(\lambda)$ l'opérateur de restriction de la transformée de Fourier à la sphère de rayon $\lambda > 0$

$$\Phi(\lambda)u(\omega) = \widehat{u}(\lambda\omega) = \int \mathrm{e}^{-i\lambda\langle x,\omega\rangle} u(x)\,\mathrm{d}x$$

dont l'adjoint (au moins formel) est l'opérateur

$$\Phi(\lambda)^* g(x) = \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{i\lambda\langle x,\omega\rangle} g(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

alors on peut écrire

$$\mu = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \Phi(\lambda)^*\Phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

En outre, l'opérateur $\Phi^*(\lambda)\Phi(\lambda)$ est un opérateur de convolution par la fonction radiale

$$K(x) = \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{i\lambda\langle x,\omega\rangle}\,\mathrm{d}\omega.$$

L'analyse spectrale n'est pas d'un recours extrême pour résoudre par exemple l'équation de Schrödinger. En revanche si l'on perturbe le laplacien par un potentiel $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ à support compact et à valeurs réelles alors

$$A_q = -\Delta + q, \quad D(A_q)$$

est autoadjoint, puisqu'il est symétrique et que

$$A_q \pm i\lambda = (A \pm i\lambda)\big(\mathrm{I} + (A \pm i\lambda)^{-1} q\big)$$

est inversible par série de Neumann, si $\lambda > \|q\|_\infty$ étant donné que l'opérateur $(A \pm i\lambda)^{-1} q$ a une norme inférieure à

$$\|(A \pm i\lambda)^{-1}\|\,\|q\|_\infty \le \lambda^{-1}\|q\|_\infty < 1.$$