THÉORIE SPECTRALE

DEVOIR LIBRE – MASTER 2 RECHERCHE

Exercice 1. Soit $(A, D(A))$ un oérateur non borné à domaine dense dans un espace de Hilbert.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \varrho(A)$, on a $(R_A(\lambda))^* = R_{A^*}(\bar{\lambda})$.
2. Montrer que A est auto-adjoint si et seulement s'il existe $\lambda \in \varrho(A)$ tel que $(R_A(\lambda))^* = R_A(\bar{\lambda})$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit qu'un endomorphisme continu $A \in L(A)$ est de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de H telle que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|A\psi_j\|^2 < \infty.$$

1. Montrer que la condition définissant les opérateurs de Hilbert-Schmidt ne dépend pas de la base hilbertienne choisie.
2. Montrer que l'ensemble $L^2(H)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt est un sous-espace vectoriel de $L(H)$ et que

   $$\|A\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|A\psi_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

   est une norme sur $L^2(H)$.
3. Montrer que l'adfjoint d'un opérateur Hilbert-Schmidt est lui-même Hilbert Schmidt.
4. On pose

   $$A_N u = \sum_{j=0}^{N} \langle Au, \psi_j \rangle \psi_j.$$

   Montrer que A_N est un endomorphisme compact et que

   $$\|A - A_N\| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|A^*\psi_j\|^2.$$
5. En déduire qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur compact. Que peut-on dire de son spectre ?

6. Soit A un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint, soit $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ la suite de ses valeurs propres réelles (répétées avec multiplicité). Montrer que
$$(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}).$$
7. On choisit de travailler dans $H = L^2([-\pi,\pi])$. On pourra dans cette question se reposer sur les séries de Fourier. Soit $K \in H$ une fonction paire à valeurs réelles et soit A l'opérateur de convolution
$$Au = K * u = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$
Montrer que A est un opérateur borné. Montrer que c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt autoadjoint. Donner ses valeurs propres, une base hilbertienne de vecteurs propres.

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné régulier. On travaille dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ et on considère l'opérateur $A = -\Delta$ de domaine
$$D(A) = \big\{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\big\}.$$
La condition $\Delta u \in L^2(\Omega)$ signifie qu'il existe une unique fonction $v \in L^2(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on ait
$$\int_\Omega u\Delta\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x.$$
Dans ce cas, on pose $Au = v = \Delta u$.

1. Montrer que l'opérateur A est fermé.
2. Montrer que pour tout $u, v \in D(A)$, on a $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$. On pourra approcher u et v par des suites de fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. En déduire que A est symétrique.
3. On veut montrer que A est autoadjoint.
   (a) Montrer qu'un opérateur symétrique et surjectif, est autoadjoint. On peut raisonner de la même manière que dans l'exercice 5 du TD.
   (b) Soit $f \in L^2(\Omega)$, montrer que $u \mapsto \langle v, f\rangle$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle + \langle \nabla u, \nabla v\rangle$.
   (c) En appliquant le théorème de représentation de Riesz dans $H_0^1(\Omega)$, montrer que tout $f \in L^2(\Omega)$ admet un antécédent par $A + 1$.
   (d) En déduire que $A + 1$ puis A est autoadjoint.
4. Montrer que pour tout $u \in D(A)$
$$|\langle \Delta u - u, u\rangle| \geq \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2.$$
En déduire que -1 est dans l'ensemble résolvant de A, puis que $(A+1)^{-1}$ est un opérateur compact (en admettant le théorème de Rellich, qui stipule que de toute suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ convergente dans $L^2(\Omega)$).

5. Appliquer le théorème spectral des opérateurs auto-adjoints compacts.
6. On se place dans $H = L^2([0, \pi])$. Déterminer le spectre et une base hilbertienne de vecteurs propres du laplacien avec données de Dirichlet.