THÉORIE SPECTRALE

EXAMEN – MASTER 2 RECHERCHE

Durée : 2 heures
Documents autorisés

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et soit $U \in L(H)$ un opérateur unitaire, i.e. un endomorphisme $U : H \to H$ tel que

$$U^*U = UU^* = \mathrm{Id}\,.$$

Le but de cet exercice est de redémontrer l'existence d'une mesure spectrale avec une autre méthode que celle du cours. Pour une fonction $[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta})$ qui est dans $L^1([-\pi, \pi])$, on note

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

ses coefficients de Fourier, et on note $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions $[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta})$ qui sont dans $L^1([-\pi, \pi])$ et telles que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty.$$

1. Pour $f \in \mathcal{A}$, on pose

$$f(U) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)U^k.$$

Montrer que la série de droite converge et que cette série définit une application linéaire continue $f(U) \in L(H)$ de norme

$$\|f(U)\| \leq \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)|.$$

La série de droite converge absolument puisque $\|U^k\| = 1$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)|\|U^k\| \leq \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)| < \infty$$

comme H est complet, la série converge. De plus

$$\|f(U)\| \leq \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)|.$$

Vérifier que pour tout polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbf{C}[z]$, on a

$$P(U) = \sum_{k=0}^{n} c_k U^k.$$

La fonction $\theta \mapsto P(\mathrm{e}^{i\theta})$ est un polynôme trigonométrique dont les coefficients de Fourier sont

$$c_k(P) = \begin{cases} c_k & \text{lorsque } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{lorsque } k \geq n+1 \text{ ou } k \leq -1 \end{cases}$$

de sorte qu'effectivement

$$P(U) = \sum_{k=0}^{n} c_k U^k.$$

2. Montrer de plus que lorsque $f \in C^2_{\mathrm{per}}(\mathbf{R})$ est une fonction périodique de période 2π de classe C^2 alors[1]

$$|\langle f(U)u, u\rangle| \leq \left(\sup|f| + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \sup|f''|\right) \|u\|^2.$$

Ceci vient du fait que

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_{L^1} \leq \sup|f|$$

et du fait que pour $n \in \mathbf{Z}^*$

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n^2}|c_n(f'')| \leq \frac{1}{n^2}\sup|f''|.$$

Ainsi a-t-on

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)| &\leq |c_0(f)| + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \sup|f''| \\ &\leq \sup|f| + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \sup|f''| \end{aligned}$$

et l'estimation demandée découle de l'inégality de Cauchy-Schwarz.

3. Montrer que pour tous $f, g \in \mathcal{A}$

$$f(U)^* = \bar{f}(U), \quad (gf)(U) = g(U)f(U).$$

On a

$$\langle f(U)u, v\rangle = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f) \underbrace{\langle U^k u, v\rangle}_{=\langle u, U^{-k}v\rangle} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{-k}(f)\langle u, U^k v\rangle = \langle u, \bar{f}(U)v\rangle$$

1. Ce qui prouve que $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}) \ni f \to \langle f(U)u, u\rangle$ est une distribution.

car $\overline{c_{-k}(f)} = c_k(\bar{f})$, et ainsi $f(U)^* = \bar{f}(U)$. En outre, on a par Fubini

$$\begin{aligned}(fg)(U) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(fg)U^k = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j(f)c_{k-j}(g)U^jU^{k-j} \\ &= \sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j(f)c_\ell(g)U^jU^\ell = f(U)g(U).\end{aligned}$$

4. Soit $f \in \mathcal{A}$, montrer que

$$f(U) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)U^k.$$

Il suffit de vérifier

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\frac{|k|}{n}U^k = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\frac{|k|}{n}U^k \right\| &\leq \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|\frac{|k|}{n} \\ &\leq \frac{N}{n}\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)| + \sum_{N+1\leq|k|\leq n} |c_k(f)| \\ &\leq \frac{N}{n}\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)| + \sum_{|k|\geq N+1} |c_k(f)|\end{aligned}$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sum_{|k|\geq N+1} |c_k(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq M$

$$\frac{N}{n}\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent pour tout $n \geq \max(N, M)$

$$\left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\frac{|k|}{n}U^k \right\| \leq \frac{N}{n}\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)| + \sum_{|k|\geq N+1} |c_k(f)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Une alternative est d'utiliser le théorème de convergence dominée dans les séries.

5. Soit $V \in L(H)$ un opérateur unitaire. On considère

$$\sigma_n(V) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)V^k$$

ainsi que le polynôme trigonométrique

$$Q_n(\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{\mathrm{e}^{in\theta} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}.$$

(a) Montrer que $\sigma_n(V)$ est autoadjoint.

On a

$$\sigma_n(V)^* = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) V^{-k} = \sigma_n(V).$$

(b) Montrer que

$$\langle \sigma_n(V)u, u\rangle = \frac{1}{n}\|Q_n(V)u\|^2.$$

En déduire que $\sigma_n(V)$ est positif.

On a en faisant le changement d'indice $\ell = k - j$

$$\begin{aligned}
\|Q_n(V)u\|^2 &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} V^k u \right\|^2 = \sum_{j,k=0}^{n-1} \langle V^{k-j}u, u\rangle \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=\ell}^{n-1} \langle V^\ell u, u\rangle + \sum_{\ell=-n+1}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1+\ell} \langle V^\ell u, u\rangle \\
&= \sum_{\ell=-n+1}^{n-1} (n - |\ell|)\langle V^\ell u, u\rangle = n \sum_{\ell=-n}^{n} \left(1 - \frac{|\ell|}{n}\right)\langle V^\ell u, u\rangle \\
&= n\langle \sigma_n(V)u, u\rangle
\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\langle \sigma_n(V)u, u\rangle \geq 0.$$

(c) En déduire que lorsque 1 n'est pas dans le spectre de V

$$\langle \sigma_n(V)u, u\rangle = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

En effet, on a

$$Q_n(V)(V - \mathrm{Id}) = (V - \mathrm{Id})Q_n(V) = (V^n - \mathrm{Id})$$

et par conséquent lorsque $V - \mathrm{Id}$ est inversible

$$\begin{aligned}
\|Q_n(V)u\| &= \|(V^n - \mathrm{Id})(V - \mathrm{Id})^{-1}u\| \\
&\leq \|V^n(V - \mathrm{Id})^{-1}u\| + \|V - \mathrm{Id})^{-1}u\| \\
&\leq 2\|(V - \mathrm{Id})^{-1}u\|.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$|\langle \sigma_n(V)u, u\rangle| \leq \frac{4}{n}\|(V - \mathrm{Id})^{-1}u\|^2.$$

6. Soit $f \in \mathcal{A}$, montrer la formule

$$\langle f(U)u, u\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta})\langle \sigma_n(\mathrm{e}^{-i\theta}U)u, u\rangle \,\mathrm{d}\theta.$$

On a

$$\begin{aligned}\langle f(U)u, u\rangle &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)\langle U^k u, u\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta})\underbrace{\sum_{k=-n}^{n}\Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)\langle \mathrm{e}^{-ik\theta}U^k u, u\rangle}_{=\langle \sigma_n(\mathrm{e}^{-i\theta}U)u,u\rangle}.\end{aligned}$$

7. Déduire des questions 5 et 6 que si f est à valeurs positives alors $\langle f(U)u, u\rangle \geq 0$, puis que $f \mapsto \langle f(U)u, u\rangle$ est donnée par une mesure borélienne positive $\mu_{u,u}$

$$\langle f(U)u, u\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} f(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\mu_{u,u}(\theta).$$

Si f est à valeurs positives alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta})\langle \sigma_n(\mathrm{e}^{-i\theta}U)u, u\rangle \,\mathrm{d}\theta \geq 0$$

et ainsi par passage à la limite

$$\langle f(U)u, u\rangle \geq 0.$$

Soit $f \in \mathcal{A}$ à valeurs réelles alors $g = \sup|f| \mp f$ est à valeurs positives donc

$$\sup|f|\,\|u\|^2 \mp \langle f(u)u, u\rangle \geq 0$$

et on déduit

$$|\langle f(U)u, u\rangle| \leq \sup|f|\,\|u\|^2$$

ce qui suffit à prouver que $f \mapsto \langle f(U)u, u\rangle$ est donnée par une mesure borélienne positive.

8. Déduire des questions 5 et 6 que lorsque le support de la fonction $\theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta})$ est dans un voisinage suffisamment petit de $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ tel que $\mathrm{e}^{i\theta_0} \notin \sigma(U)$ alors

$$\langle f(U)u, u\rangle = 0.$$

Comme l'ensemble résolvant est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\theta \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$,

$$U - \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}\big(\mathrm{e}^{-i\theta} - \mathrm{Id}\big)$$

est inversible et par conséquent

$$\langle \sigma_n(\mathrm{e}^{-i\theta}U)u,u\rangle = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui implique lorsque le support de la fonction $\theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta})$ est contenu dans $[\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon]$

$$\langle f(U)u,u\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} f(\mathrm{e}^{i\theta})\langle \sigma_n(\mathrm{e}^{-i\theta}U)u,u\rangle \,\mathrm{d}\theta = 0$$

par le théorème de convergence dominée (ou une majoration brutale).

9. Quelles sont les propriétés de la mesure $\mu_{u,u}$?

   C'est une mesure de Borel positive, qui vérifie

$$\|u|^2 = \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{d}\mu_{u,u}, \quad \langle Uu,u\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\mu_{u,u}$$

   et plus généralement pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[z]$

$$\langle P(U)u,u\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\mu_{u,u}.$$

   Considérée comme une mesure sur le cercle, son support est contenu dans $\sigma(U)$.

10. *Un exemple :* Soit $H = \ell^2(\mathbf{Z})$ et U l'opérateur de décalage

$$U(c_n)_{n\in\mathbf{Z}} = (c_{n+1})_{n\in\mathbf{Z}}.$$

   (a) Montrer que U est unitaire.
   C'est un simple changement d'indice dans la série

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_{n+1}|^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2.$$

   (b) Déterminer $\sigma_{\mathrm{p}}(U)$.

   Le spectre d'un opérateur unitaire est contenu dans le cerlce unité, donc les valeurs propres (s'il y en a) sont de la forme $\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi,\pi]$. L'équation aux valeurs propres est de la forme

$$c_{n+1} = \mathrm{e}^{i\theta}c_n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

   ce qui s'écrit

$$c_{n+1} = \mathrm{e}^{i\theta}c_n, \quad c_{-n-1} = \mathrm{e}^{-i\theta}c_{-n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

   Par récurrence, on obtient

$$c_n = \mathrm{e}^{in\theta}c_0$$

mais pour que $(c_n = \mathrm{e}^{in\theta})_{n\in\mathbf{Z}}$ soit dans $\ell^2(\mathbf{Z})$ il faut que $c_0 = 0$. Ainsi le spectre ponctuel est vide

$$\sigma_{\mathrm{p}}(U) = \varnothing$$

(c) On considère l'isométrie

$$\Phi : H \to L^2([-\pi,\pi])$$
$$c = (c_n)_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n \mathrm{e}^{in\theta}$$

où $L^2([-\pi,\pi])$ est muni du produit scalaire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\overline{v(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

Calculer $\Phi U \Phi^{-1}$.

On a

$$\Phi U \Phi^{-1} u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{n+1}\mathrm{e}^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n \mathrm{e}^{i(n-1)\theta} = \mathrm{e}^{-i\theta} u$$

et $V = \Phi U \Phi^{-1}$ est la multiplication par $\mathrm{e}^{i\theta}$

$$V = \Phi U \Phi^{-1} = \mathrm{e}^{-i\theta}.$$

(d) En déduire une formule pour la mesure spectrale $\mu_{c,c}$.

On note $u = \Phi(c)$ et comme Φ est une isométrie

$$\langle Uc, c\rangle = \langle Vu, u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i\theta} u(\theta)\overline{u(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i\theta} u(-\theta)\overline{u(-\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

La mesure spectrale est absolument continue par rapport à la mesure de probabilité sur le cercle

$$\mu_{c,c} = |u(-\theta)|^2\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = |\Phi c(-\theta)|^2\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

de densité $|\Phi c(-\theta)|^2$.

Exercice 2. Soit $(A, D(A))$ un opérateur autoadjoint. Il s'agit dans cet exercice de donner une caractérisation alternative de son spectre. On note

$$\tilde\sigma(A) = \big\{\lambda \in \mathbf{R} : \exists (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ suite de } D(A) \text{ telle que } \forall n\in\mathbf{N}\ \|u_n\| = 1 \text{ et } \lim (A-\lambda)u_n = 0\big\}.$$

On veut montrer que $\sigma(A) = \tilde\sigma(A)$.

1. Montrer que $\mathbf{R} \setminus \sigma(A) \subset \mathbf{R} \setminus \tilde{\sigma}(A)$.

   Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \sigma(A) = \varrho(A) \cap \mathbf{R}$ alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim(A-\lambda)u_n = 0$,
$$u_n = (A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)u_n$$
   on obtient par continuité de la résolvante
$$\lim u_n = 0$$
   ce qui est en contradiction avec $\|u_n\| = 1$, et ainsi $\lambda \notin \tilde{\sigma}(A)$.
2. Montrer que $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \tilde{\sigma}(A)$.

   Si λ est une valeur propre de A alors il existe un vecteur propre $u \in H\setminus\{0\}$ et la suite constante
$$u_n = \frac{u}{\|u\|}$$
   convient pour montrer que $\lambda \in \tilde{\sigma}(A)$.
3. Soit $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$.
   (a) Supposons que $v = \lim(A-\lambda)u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $D(A)$. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge faiblement vers un $u \in H$, c'est-à-dire que pour tout $w \in H$
$$\lim\langle u_{\varphi(n)}, w\rangle = \langle u, w\rangle.$$
   Montrer que $v = (A-\lambda)u$.

   On a pour tout $w \in D(A)$,
$$\langle u, (A-\lambda)w\rangle = \lim\langle u_{\varphi(k)}, (A-\lambda)w\rangle = \lim\langle (A-\lambda)u_{\varphi(k)}, w\rangle = \langle v, w\rangle$$
   ce qui montre que $u \in D(A)$ puisque
$$|\langle u, (A-\lambda)w\rangle \leq \|v\|\|w\|, \quad w \in D(A).$$
   Ainsi
$$\langle v - (A-\lambda)u, w\rangle = 0, \quad w \in D(A).$$
   Comme le domaine de A est dense dans H, on en tire $v = (A-\Lambda)u$.
   (b) En déduire que si $v \in H \setminus \operatorname{ran}(A-\lambda)$ alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $D(A)$ telle que $\lim\|u_n\| = \infty$ et $v = \lim(A-\lambda)u_n$.

   Comme $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$, on a $\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda)} = H$ et donc il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $D(A)$ telle que
$$v = \lim(A-\lambda)u_n.$$
   Cette suite ne peut être bornée car sinon d'après la question précédente, on aurait $v \in \operatorname{ran}(A-\lambda)$. Il existe donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\|u_{\varphi(n)}\| = \infty$. Cette sous-suite convient.

(c) Montrer que $\lambda \in \tilde{\sigma}(A)$.

Soit $v \in H \setminus \operatorname{ran}(A-\lambda)$, d'après la question précédente, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $D(A)$ telle que $\lim \|u_n\| = \infty$ et $v = \lim(A-\lambda)u_n$. On pose $w_n = u_n/\|u_n\|$ et on a $\|w_n\| = 1$ et

$$\lim(A-\lambda)w_n = 0$$

ce qui prouve que $\lambda \in \tilde{\sigma}(A)$.

4. Que peut-on dire du spectre résiduel de A ? Conclure.

Le spectre résiduel d'un opérateur autoadjoint est vide ainsi

$$\sigma_(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(A) \subset \tilde{\sigma}(A).$$

Finalement, on a bien $\sigma(A) = \tilde{\sigma}(A)$.