ALGÈBRE BILINÉAIRE

DIPLOME : Licence	Durée de l'examen : 2 heures
UE : Algèbre bilinéaire	Nom du rédacteur : David Dos Santos Ferreira
Semestre : 4	
Session ……1………	☐ Documents autorisés :
Date : 21 mars 2024	■ Documents non autorisés
Horaire : 9h00–11h00	☐ Calculatrices autorisées
Nombre de pages : **2**	■ Calculatrices non autorisées

Question de cours. Définir une famille orthonormée dans un espace euclidien. Montrer qu'une famille orthonormée est libre. Montrer que c'est une base lorsqu'elle est de cardinal la dimension de l'espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, soit $u \in L(E)$ un endomorphisme. On considère l'endomorphisme $v = u^* \circ u$.

1. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?
2. Monter que $\ker v = \ker u$.
3. Montrer que les valeurs propres de v sont positives ou nulles.
4. On suppose que l'endomorphisme u est antisymétrique, i.e. $u^* = -u$. On considère une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et B la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$.
   (a) Calculer B en fonction de A.
   (b) Montrer que $\det(B + \lambda^2 \mathrm{I}_n) = (-1)^n \det(A + \lambda \mathrm{I}_n) \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.
   (c) Montrer que les racines du polynôme caractéristique de A (et donc de u) sont imaginaires pures.
5. Montrer qu'un endomorphisme u est antisymétrique si et seulement si $\langle u(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.
6. Montrer que la trace de la matrice d'un endomorphisme antisymétrique dans une base orthonormée est nulle quelle que soit la base choisie.

Exercice 2. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère la matrice

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbf{R}^3$ que l'on déterminera.
2. Écrire la matrice Q de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.
3. Écrire la matrice S de la symétrie orthogonale sur F.

4. Donner une expression du projecteur sur le plan d'équation $x + y + z = 0$. En déduire sa matrice R.

Exercice 3. Dans un espace euclidien E, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de dimension $n - 1$. Soit $a \in E$ et $b \in E$ tel que $a \neq b$ et

$$\|a\| = \|b\|.$$

On veut montrer qu'il existe une unique réflexion $r : E \to E$ échangeant a et b

$$r(a) = b, \quad r(b) = a.$$

1. Soit s_F une symétrie par rapport au sous-espace vectoriel F de E. Montrer que $\ker(s_F - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\ker(s_F + \mathrm{Id}_E) = F^{\perp}$.
2. Supposons qu'il existe une réflexion échangeant a et b.
   (a) Calculer $r(a - b)$ et $r(a + b)$.
   (b) Déduire des questions précédentes le sous-espace F de dimension $n - 1$ tel que $r = s_F$.
   (c) En déduire l'unicité de la réflexion échangeant a et b.
3. Montrer que $a + b$ et $a - b$ sont orthogonaux.
4. Décomposer les vecteurs a et b dans la somme directe $E = \mathrm{Vect}(a - b) \oplus \mathrm{Vect}(a - b)^{\perp}$.
5. Vérifier que la symétrie s_F déterminée grâce à la question 2 convient.
6. Donner une expression algébrique de la réflexion r échangeant a et b.