2023-2024

DEVOIR MAISON 1 ANALYSE 3

Soit n un entier naturel non nul. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ on définit $\|\!|A|\!\|$ par

$$\|\!|A|\!\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

1. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|\!|A|\!\|$ est bien définie.
2. Montrer que
$$\|\!|A|\!\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$
3. Montrer que l'application $A \mapsto \|\!|A|\!\|$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\,\|\!|B|\!\|$.
5. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ si $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Si $A = (a_{i,j})_{i,j\in[1,n]}$ est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer $\|\!|A|\!\|$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$.
6. On suppose que $\|\!|A|\!\| < 1$. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.
   On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{\ell=0}^{k} A^\ell$.
   (a) Montrer que $I - A$ est inversible.
   (b) Calculer $(I - A)S_k$ puis sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que la suite $(S_k)_k$ converge vers l'inverse de $(I-A)$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
7. On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n.
   (a) Traduire la propriété démontrée à la question 6(a) en terme d'inclusion d'une boule dans $GL_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
   On pourra étant donnée une matrice A, définir la suite $A_k = A - \frac{1}{k}I$.
8. On note det l'application déterminant de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que det est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que la différentielle de det en I est définie par $Ddet_I(H) = Tr(H)$ où Tr désigne la trace.
   On pourra étant donnée une matrice H, calculer $det(I + tH)$ en fonction de t et des valeurs propres complexes de H.
   (c) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Ddet_M(H) = Tr(det(M)M^{-1}H)$ pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$.
   (d) En utilisant 7(c), en déduire que pour tout $M, H \in M_n(\mathbb{R})$,
   $$Ddet_M(H) = Tr({}^t com(M)H)$$
   où $com(M)$ est la comatrice de M.