ALGÈBRE BILINÉAIRE

DIPLOME : Licence	Durée de l'examen : 2 heures
UE : Algèbre bilinéaire	Nom du rédacteur : David Dos Santos Ferreira
Semestre : 4	
Session ......1........	☐ Documents autorisés :
Date : 21 mars 2024	■ Documents non autorisés
Horaire : 9h00–11h00	☐ Calculatrices autorisées
Nombre de pages : **2**	■ Calculatrices non autorisées

Question de cours. Définir une famille orthonormée dans un espace euclidien. Montrer qu'une famille orthonormée est libre. Montrer que c'est une base lorsqu'elle est de cardinal la dimension de l'espace vectoriel.

Une famille orthonormée d'un espace euclidien E est une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_m)$ tels que

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

pour tous $1 \leq j, k \leq m$. Une telle famille est libre car si

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j = 0$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ sont des réels alors en faisant le produit scalaire avec e_k

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{=\delta_{j,k}} = \lambda_k.$$

On a donc nécessairement $m \leq \dim E$. Si $m = \dim E$ alors cette famille est nécessairement génératrice, et donc une base.

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, soit $u \in L(E)$ un endomorphisme. On considère l'endomorphisme $v = u^* \circ u$.

1. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

   L'endomorphisme v est diagonalisable car c'est un endomorphisme symétrique
   $$v^* = u^* \circ u^{**} = v.$$

2. Monter que $\ker v = \ker u$.

   Si $x \in \ker u$ alors $v(x) = u^*(u(x)) = u^*(0) = 0$. Réciproquement, si $x \in \ker v$ alors
   $$0 = \langle v(x), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle = \|u(x)\|^2$$
   donc $x \in \ker u$ par le caractère défini positif du produit scalaire.

3. Montrer que les valeurs propres de v sont positives ou nulles.

   Soit λ une valeur propre de u et $x \neq 0$ un vecteur propre associé alors
$$\langle v(x), x\rangle = \|u(x)\|^2 = \lambda \|x\|^2$$
et ainsi
$$\lambda = \frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

4. On suppose que l'endomorphisme u est antisymétrique, i.e. $u^* = -u$. On considère une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et on note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et B la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$.
   (a) Calculer B en fonction de A.

   Comme u est antisymétrique, on a $v = -u^2$ et la matrice B est donc
$$B = -A^2.$$
   (b) Montrer que $\det(B + \lambda^2 \mathrm{I}_n) = (-1)^n \det(A + \lambda \mathrm{I}_n) \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

   On a
$$\begin{aligned}\det(B + \lambda^2 \mathrm{I}_n) &= \det(-A^2 + \lambda^2 \mathrm{I}_n) = (-1)^n \det(A^2 - \lambda^2 \mathrm{I}_n)\\ &= (-1)^n \det((A + \lambda \mathrm{I}_n)(A - \lambda \mathrm{I}_n))\\ &= (-1)^n \det(A + \lambda \mathrm{I}_n) \det(A - \lambda \mathrm{I}_n).\end{aligned}$$
   (c) Montrer que les racines du polynôme caractéristique de A (et donc de u) sont imaginaires pures.

   Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une racine du polynôme caractéristique de A alors $-\lambda^2$ est racine du polynôme caractéristique de B, donc une valeur propre μ de v. Or on a vu que $\mu \in \mathbf{R}_+$ donc
$$\lambda = i\mu \quad \text{ou } \lambda = -i\mu$$
   et μ est donc imaginaire pure. Notons que comme le polynôme caractéristique de B est à valeurs réelles, $i\mu$ et $-i\mu$ sont valeurs propres.

5. Montrer qu'un endomorphisme u est antisymétrique si et seulement si $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

   Si u est antisymétrique alors pour tous $x \in E$
$$\langle u(x), x\rangle = \langle x, u^*(x)\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle$$
et donc $\langle u(x), x\rangle = 0$. Réciproquement, soit u un endomorphisme tel que pour tous $x \in E$
$$\langle u(x), x\rangle = 0.$$
Alors pour tous $x, y \in E$, on a
$$\begin{aligned}0 = \langle u(x+y), x+y\rangle &= \underbrace{\langle u(x), x\rangle}_{=0} + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \underbrace{\langle u(y), y\rangle}_{=0}\\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle\end{aligned}$$
ce qui implique pour tous $x, y \in E$
$$\langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$
soit $u^* = -u$ ainsi u est antisymétrique.

6. Montrer que la trace de la matrice d'un endomorphisme antisymétrique dans une base orthonormée est nulle quelle que soit la base choisie.

Dans une base orthonormée

$$A = (\langle u(e_j), e_k\rangle)_{1\leq j,k\leq n}$$

D'après la question précédente

$$\mathrm{Tr}A = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle u(e_j), e_j\rangle}_{=0} = 0.$$

Exercice 2. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère la matrice

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbf{R}^3$ que l'on déterminera.

La matrice P est symétrique et

$$P^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix} = P$$

c'est donc la matrice d'une projection orthogonale. Comme $P^2 = P$, seuls 1 et 0 peuvent être valeurs propres, et comme $P \neq \mathrm{I}_3$ et $P \neq 0$, 0 et 1 sont valeurs propres. En outre

$$\mathrm{Tr}P = 2$$

donc 1 est valeur propre double et $\dim\ker P = 1$. On détermine alors $\ker P$, le système

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

soit

$$\ker P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

P est donc la matrice de la projection orthogonale sur le plan

$$F = (\ker P)^{\perp} = \mathrm{Im}\,P = \mathrm{Im}(P - \mathrm{I}_3) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$$

2. Écrire la matrice Q de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.

Cette matrice est donnée par

$$Q = \mathrm{I}_3 - P = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Écrire la matrice S de la symétrie orthogonale sur F.

   Elle est donnée par
$$S = P - Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
   C'est bien une matrice symétrique et orthogonale.

4. Donner une expression du projecteur sur le plan d'équation $x + y + z = 0$. En déduire sa matrice R.

   Le plan F d'équation $x + y + z = 0$ est le plan orthogonal au vecteur
$$v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Le projecteur R est donc donné par
$$RX = X - \frac{1}{\|V\|^2}\langle X, V\rangle V = X - \frac{1}{3}(x + y + z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   et sa matrice (dans la base canonique) est donc
$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Dans un espace euclidien E, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de dimension $n - 1$. Soit $a \in E$ et $b \in E$ tel que $a \neq b$ et
$$\|a\| = \|b\|.$$
On veut montrer qu'il existe une unique réflexion $r : E \to E$ échangeant a et b
$$r(a) = b, \quad r(b) = a.$$

1. Soit s_F une symétrie par rapport au sous-espace vectoriel F de E. Montrer que $\ker(s_F - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\ker(s_F + \mathrm{Id}_E) = F^\perp$.

   Si on note p_F la projection orthogonale sur F, on a par définition
$$s_F = p_F - p_{F^\perp}$$
   et donc
$$\begin{aligned} s_F - \mathrm{Id}_E &= -2p_{F^\perp} \\ s_F + \mathrm{Id}_E &= 2p_F \end{aligned}$$
   ce qui implique
$$\begin{aligned} \ker(s_F - \mathrm{Id}_E) &= \ker p_{F^\perp} = F \\ \ker(s_F + \mathrm{Id}_E) &= \ker p_F = F^\perp. \end{aligned}$$

2. Supposons qu'il existe une réflexion échangeant a et b.
   (a) Calculer $r(a - b)$ et $r(a + b)$.

$$r(a - b) = r(a) - r(b) = b - a = -(b - a), \quad r(a + b) = r(a) + r(b) = a + b$$

(b) Déduire des questions précédentes le sous-espace F de dimension $n-1$ tel que $r = s_F$.

D'après la question précédente
$$a - b \in \ker(s_F + \mathrm{Id}_E) = F^\perp, \quad a + b \in \ker(s_F - \mathrm{Id}_E)$$
or r est une réflexion donc F est de dimension $n-1$ et
$$\dim F^\perp = n - (n-1) = 1.$$
Comme $a - b \neq 0$, on en tire
$$F^\perp = \mathrm{Vect}(a-b), \quad F = \mathrm{Vect}(a-b)^\perp.$$

(c) En déduire l'unicité de la réflexion échangeant a et b.

Si r et r' sont deux réflexions échengeant a et b alors
$$r = s_F = r'.$$

3. Montrer que $a+b$ et $a-b$ sont orthogonaux.

$$\langle a-b, a+b\rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0$$

4. Décomposer les vecteurs a et b dans la somme directe $E = \mathrm{Vect}(a-b) \oplus \mathrm{Vect}(a-b)^\perp$.

$$a = \underbrace{\frac{1}{2}(a-b)}_{\in \mathrm{Vect}(a-b)} + \underbrace{\frac{1}{2}(a+b)}_{\in \mathrm{Vect}(a-b)^\perp}.$$
$$b = \underbrace{-\frac{1}{2}(a-b)}_{\in \mathrm{Vect}(a-b)} + \underbrace{\frac{1}{2}(a+b)}_{\in \mathrm{Vect}(a-b)^\perp}.$$

5. Vérifier que la symétrie s_F déterminée grâce à la question 2 convient.

On considère la symétrie s_F par rapport à $F = \mathrm{Vect}(a-b)^\perp$: c'est bien une réflexion car $a - b \neq 0$ entraîne que $\dim F = n-1$ et de plus
$$s_F(a) = p_F(a) - p_F^\perp(a) = \frac{1}{2}((a+b) - (a-b)) = b$$
$$s_F(b) = p_F(b) - p_F^\perp(b) = \frac{1}{2}((a+b) - (b-a)) = a.$$

6. Donner une expression algébrique de la réflexion r échangeant a et b.

On a
$$p_{F^\perp} = \frac{1}{\|a-b\|^2}\langle x, a-b\rangle (a-b)$$
et donc
$$r(x) = s_F(x) = x - 2p_F(x) = x - \frac{2}{\|a-b\|^2}\langle x, a-b\rangle(a-b).$$
Notons que la matrice R de cette réflexion dans une base orthonormée est de la forme
$$R_{jk} = \delta_{jk} - \frac{2(a_j - b_j)(a_k - b_k)}{\|a-b\|^2}.$$