Licence de Mathématiques L2 Université de Lorraine
2023-2024

Analyse 3 - TD 3
Applications linéaires continues

1. Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues est normé par :

$$|||L||| := \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F.$$

Montrer que

$$|||L||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in E, \quad \|L(x)\| \leq C\|x\|\}.$$

2. Montrer que la norme de la composée de deux applications linéaires continues est majorée par le produit des normes de ces applications (il s'agit de la norme subordonnée).

3. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni des normes suivantes :

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \qquad \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|), \qquad \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice $(a \ \ b)$. Déterminer en fonction de a et b la norme subordonnée $|||L|||$ pour chacune de ces trois normes sur $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que les applications

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, x_2) \end{array}$$

et

$$g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, x_2, 0) \end{array}$$

sont continues.

5. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Calculer $|||\varphi|||$ où $||| \cdot |||$ est la norme d'application linéaire subordonnée aux normes de E et F, dans les cas suivants :
   (a) $E = F = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$,
   $$\varphi(x,y) = (5x, -2y).$$
   (b) $E = (\mathbb{R}^3, \| \cdot \|_1)$, $F = (\mathbb{R}^3, \| \cdot \|_\infty)$,
   $$\varphi(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z).$$
   (c) $E = (\mathbb{R}^3, \| \cdot \|_\infty)$, $F = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$,
   $$\varphi(x,y,z) = (2x+y, 3z-y).$$

(d) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $F = (M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$,

$$\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, les 3 espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $\mathbb{R}^n$ sont isomorphes.

7. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

   (a) Montrer que l'application qui à toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ associe le nombre

   $$N(A) := n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

   définit une norme sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que

   $$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \qquad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

   (c) On en déduit que l'application produit

   $$\begin{array}{rccl} P\colon & M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

   est continue en utilisant la norme sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ donnée par $N_\infty(A,B) := \max(N(A), N(B))$.