Analyse 3 - TD 1
Topologie des espaces normés

1 Normes

1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N = \alpha|\cdot|$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note :

   $$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

   (a) Montrer que les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont des normes.

   (b) Déterminer des réels α, β et γ minimaux tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

   $$\|x\|_\infty \le \alpha\|x\|_1 \le \beta\|x\|_2 \le \gamma\|x\|_\infty.$$

   (c) Dessiner la boule unité de chacune des trois normes dans $\mathbb{R}^2$.

3. (a) Montrer que l'application N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = |x+y| + |x|$ est une norme.

   (b) Déterminer les meilleures constantes possibles α et β telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$\alpha\|(x,y)\|_1 \le N(x,y) \le \beta\|(x,y)\|_1.$$

   (c) Dessiner la boule unité associée à N.

4. Soit $p \in]1, +\infty[$. On va montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

   $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

   (a) Soient p et q des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall u, v \ge 0, \quad uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
   On pourra utiliser la concavité de la fonction $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$.

   (b) Soient $x = (x_1 \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ non nuls. On note $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_q$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

   $$\frac{|x_i y_i|}{\alpha\beta} \le \frac{|x_i|^p}{p\alpha^p} + \frac{|y_i|^q}{q\beta^q},$$

   et en déduire l'inégalité de Hölder $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_q$.

   (c) En écrivant que $|x_i + y_i|^p \le |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$, montrer que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire.

   (d) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

5. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On définit l'application

   $$\begin{array}{cccc} N : & M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2} & \mapsto & N(A) = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \end{array}.$$

   (a) Montrer que N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \le N(A)N(B)$.

   (c) Donner un exemple de matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles $N(AB) < N(A)N(B)$.

6. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que
   $$N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt \quad \text{ et } N_\infty : f \mapsto \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
   sont des normes sur E.

   (b) Représenter l'ensemble des graphes des fonctions de $B(0,1)$ pour la norme N_∞.

   (c) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Tracer le graphe d'une fonction de $B(0,1)$ pour la norme N_1 qui vérifie $f(x) > n$.

   (d) Les normes N_1 et N_∞ sont elles équivalentes ?

2 Topologie

1. L'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est-il ouvert (resp. fermé) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$? Justifier les réponses.

2. Préciser si les ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont ouverts, fermés, ou ni ouverts ni fermés :
$$]1,3]; \quad [1,+\infty[; \quad]-1,0] \cup [1,2]; \quad [1,2] \cup \left(\cup_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{n}\right\}\right).$$

3. (a) Pour $n \geq 1$, soit $I_n = \left]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right[$. Montrer que I_n est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ mais que $\cap_{n\geq 1} I_n$ ne l'est pas.

   (b) Pour $n \geq 1$, soit $F_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{1}{n}\right\}$. Montrer que les F_n sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ mais que $\cup_{n\geq 1} F_n$ ne l'est pas.

4. Dans $\mathbb{R}$ muni de la norme donnée par la valeur absolue, déterminer intérieur, adhérence et frontière de chacun des sous-ensembles suivants.
$$A = \{2,4,5\}, \quad B = [-1,1[\cup\{3\}, \quad C = \mathbb{Z}, \quad D = \mathbb{Q},$$
$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right[, \quad H = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}} \{\cos(2\pi\alpha)\}, \quad I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}.$$

5. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, déterminer si chaque ensemble est ouvert, fermé, borné. En déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière.
$$A = \mathbb{R}^2, \quad B = [1,3] \times \{2\}, \quad C = [-1,1[\times]-1,1], \quad D = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 2\},$$
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} \geq 1\}.$$

6. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne, déterminer intérieur, adhérence et frontière des sous-ensembles suivants.
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 \geq 0, y > x\}, \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}, \quad C = \mathbb{Q}\times\mathbb{Z}.$$

7. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut-il être à la fois borné et dense ? Justifier soigneusement la réponse. Parmi les ensembles des deux exercices précédents, lesquels sont denses ?