Formes quadratiques et dualité

Exercice 1

Pour chacune des formes quadratiques suivantes, écrire la matrice de la forme polaire b dans la base canonique, la réduire selon Gauss, déterminer son rang, sa signature, son noyau et une base b-orthogonale.

1. $q(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3$.
2. $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$
3. $q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
4. $q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$
5. $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$

Exercice 2

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et a un réel. Soit q la forme quadratique définie sur E pour tout vecteur x de E de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans $\mathcal{B}$ par :

$$q(x) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3$$

1. Déterminer la matrice B de la forme polaire de q dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer le déterminant de B.
3. Pour quelles valeurs de a la forme q est-elle non dégénérée ?
4. Réduire q et déterminer son noyau, son rang et sa signature en fonction de a.
5. Déterminer une base orthogonale pour b.
6. En déduire une matrice inversible telle que $D = {}^tPBP$ soit diagonale.

Exercice 3

Soit a un réel. Considérons sur $\mathbf{R}^4$ la forme quadratique suivante :

$$q_a(x, y, z, t) = a^2x^2 + 2axy + 2axz + 2axt - 2yt - 2zt$$

1. Écrire la matrice de q_a dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
2. En déduire le rang de q_a en fonction de a. Quelle est la dimension de $\ker q_a$?
3. Réduire en carré q_a à l'aide de la méthode de Gauss selon les valeurs de a.
4. En déduire la signature de q_a en fonction de a.

Exercice 4

On considère sur $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ les deux formes quadratiques suivantes :

$$q_1(x, y, z) = xy - yz + xz \quad , \quad q_2(x, y, z) = x^2 + z^2 + 2xy + 2xz$$

1. Réduire en carré q_1 et q_2 à l'aide de la méthode de Gauss.
2. Montrer que q_1 et q_2 ont même rang et même signature.

Exercice 5

On définit l'application q sur $\mathbf{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_2[X]\ ,\ q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2$$

1. Montrer que q est une forme quadratique dont on déterminera la forme polaire φ.
2. Déterminer la matrice de q dans la base $(1, X, X^2)$.
3. Déterminer le noyau et le cône isotrope de q. Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_2[X]$?
4. q est-elle non dégénérée ? Définie ? Positive ou négative ?
5. DÃ©terminer $\{X^2\}^{\perp_\varphi}$ et $\{1\}^{\perp_\varphi}$.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Considérons l'application $q : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}, A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$.

1. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire φ.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont φ-orthogonaux.
3. Montrer que la restriction de q à $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est une forme quadratique définie positive.
4. Que peut-on dire de la restriction de q à $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$?
5. En déduire la signature et le rang de q.

Exercice 7

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $x, y \in E$. Montrer que $x = y$ si et seulement si pour tout $\varphi \in E^\star$, $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Exercice 8

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient n un entier naturel non nul et $x_0, x_1 \dots, x_n$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ de polynômes définis par $L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ est une base de $E = \mathbb{K}_n[X]$.
2. Déterminer sa base duale.
3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que les points x_i sont dans un intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe des constantes réelles uniquement déterminées $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ telles que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\quad \int_a^b P(t)dt = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P(x_j).$$
4. Détailler le cas où $n = 2$, $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, pour obtenir la formule de Simpson (ou formule des trois niveaux) :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x]\ \ ,\quad \int_a^b P(t)dt = \frac{b-a}{6}\left[P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right]$$