Groupe orthogonal et produit vectoriel

Exercice 1

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Exercice 2

$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

1. $f \in \mathrm{O}(E)$.
2. $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
3. $\forall x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à x.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $u, v, w \in \mathbf{R}^3$, on a : $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$.
2. À quelle condition a-t-on $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$?
3. Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$: $\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.
4. En déduire que u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$.

Exercice 4

Soit $a, b \in \mathbf{R}^3$, $a \neq 0$. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbf{R}^3$:

$$a \wedge x = b \tag{1}$$

1. Montrer que (1) admet au moins une solution si et seulement si a et b sont orthogonaux.
2. Dans le cas où a et b sont orthogonaux, résoudre (1).

Exercice 5

Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$, considérons $S = a + b + c$, $\sigma = ab + ac + bc$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette matrice M est orthogonale si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. À quelle condition a-t-on $M \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$?

Exercice 6

Pour tout $a \in \mathbf{R}^3$, on considère l'application g_a définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ par :

$$\forall x \in E \quad g_a(x) = a \wedge x$$

1. Montrer que g_a est un endomorphisme antisymétrique de $\mathbf{R}^3$.

2. Déterminer $\ker(g_a)$ et $\operatorname{Im}(g_a)$.
3. Soit f un endomorphisme antisymétrique, montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbf{R}^3$ tel que $f = g_a$.

Exercice 7

On suppose que $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ est muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Dans chacun des cas suivants déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$(a)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (b)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \quad (c)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \quad (d)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$(e)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (f)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \quad (g)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (h)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Dans $\mathbf{R}^3$, soit f la rotation axiale d'axe dirigé par $e_1 + e_2 + e_3$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_2).

Exercice 9

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\ker(u - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}_E)^{\perp}$.
2. En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la projection orthogonale de x sur $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 10

Soit $\theta, \omega \in E$ deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien, montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal u tel que $u(\theta) = \omega$.

Exercice 11

Soit M une matrice carrée à coefficients réels de taille n.

1. Montrer que $M\,{}^{\mathrm{t}}M$ est une matrice diagonalisable à valeurs propres positives. En déduire que l'on peut trouver une matrice R telle que $M\,{}^{\mathrm{t}}M = R^2$.
2. Montrer que la matrice M peut se décomposer sous le forme $M = RU$ avec $U \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ et R une matrice symétrique à valeurs propres positives.
3. Montrer que dans le cas où M est inversible, la décomposition précédente est unique.

Exercice 12

Soit A une matrice carrée à coefficients réels inversible.

1. Quelle forme a la matrice de passage d'une base de $\mathbf{R}^n$ à son orthonormalisée de Gram Schmidt (pour le produit euclidien canonique sur $\mathbf{R}^n$?
2. Montrer que A peut se décomposer sous la forme $A = QR$ avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coeffcients diagonaux strictement positifs.
3. Monter que la décomposition précédente est unique.