Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Exercice 1

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. p est un projecteur orthogonal.
2. p est symétrique.
3. $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 2

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et s une symétrie de E. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. s est une symétrie orthogonale.
2. s est symétrique.
3. $\forall x \in E,\ \|s(x)\| = \|x\|$.

Exercice 3

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 4

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que s est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F que l'on déterminera. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$ et un système d'équation(s) de $F^\perp$.

Exercice 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On considère

$$\lambda = \inf_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

et l'application $b : E \times E \to \mathbf{R}$ donnée par

$$b(x, y) = \langle u(x) - \lambda x, y \rangle.$$

1. Montrer que $x \mapsto \langle u(x), x\rangle$ est une application continue entre $(E, \|\cdot\|)$ et $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. En déduire que λ est bien définie et que c'est un minimum (cf. cours Analyse 3).
2. Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique positive.
3. Soit $x_0 \in E$ un vecteur qui réalise le minimum λ. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

Exercice 7

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes symétriques. Montrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 8

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker u = \ker(u^* \circ u)$ et $\operatorname{Im} u^* = \operatorname{Im}(u^* \circ u)$.
2. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$:

$$\operatorname{rang}({}^tAA) = \operatorname{rang}(A\,{}^tA) = \operatorname{rang}(A).$$

Exercice 9

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. On appelle isométrie de E toute application $g : E \longrightarrow E$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad , \quad \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$$

1. Soit l'application $f : E \to E$ donnée par

$$f(x) = g(x) - g(0)$$

   Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. En déduire que $f \in \mathrm{O}(E)$.
3. En déduire que toute isométrie de E s'écrit comme la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

Exercice 10

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité. C'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E \quad , \quad \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y)\rangle = 0$$

1. Calculer $\langle x + y, x - y\rangle$ pour des vecteurs x, y.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}^+$ vérifiant : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \alpha\|x\|$.
3. En déduire qu'il existe $v \in \mathrm{O}(E)$ tel que $u = \alpha v$.

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable. Diagonaliser A en trouvant une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 12

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité et rangées en ordre croissant. Montrer que :

$$\forall x \in E \ , \ \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x \rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons la forme bilinéaire b_α sur $\mathbf{R}^n$ définie pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ par :

$$b_\alpha(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$$

Déterminer les conditions sur α pour que b_α soit définie positive.