Espaces euclidiens

Exercice 1

Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère la famille de vecteurs (u, v, w) donnés par

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, -1, 0)$$

Montrer que (u, v, w) est une base, puis procéder à l'orthonormalisation de cette famille.

Exercice 2

On considère $E = \mathbf{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $d \in \mathbf{N}^*$. On considère

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire sur E.
2. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de E.
3. Construire une base orthonormée $(L_0, \ldots, L_3)$ dans le cas $d = 3$.

Exercice 3

Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 5 muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E ayant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{cases}$$

Déterminer une base et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 4

En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, montrer l'inégalité d'Hadamard

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|$$

pour toute famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. En déduire

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}^2}$$

pour toute matrice $A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$.

Exercice 5

On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0, 1]; \mathbf{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles.

1. Quelle est la dimension de E ?

2. Montrer que
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
définit une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
3. On considère
$$F = \{f \in E : f(0) = 0\}.$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $F^\perp$.
4. Déterminer $(F^\perp)^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

Exercice 6

On considère $E = \mathbf{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $d \in \mathbf{N}^*$. On considère
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^\infty P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale généralisée dans la définition précédente est bien convergente.
2. Montrer que c'est un produit scalaire sur E.
3. Construire une base orthonormée dans le cas $d = 3$.

Exercice 7

On munit $\mathbf{R}^4$ du produit scalaire canonique, et on considère
$$G = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}.$$
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, déterminer un système d'équations de $G^\perp$.

Exercice 8

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E, montrer les relations
$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp, \quad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$