Espaces euclidiens

Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout couple (P, Q) de $\mathbf{R}_n[X]$, on définit : $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n\,[X]$.

Exercice 2

Déterminer tous les produits scalaires sur $E = \mathbf{R}^2$. Paramétrer puis tracer les ensembles $S = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|^2 = 1\}$.

Exercice 3

Soit φ la forme bilinéaire dfinie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^3 \ , \ \varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3$$

1. Écrire la forme quadratique q associée à φ.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. La forme φ est-elle positive ?

Exercice 4

Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, montrer l'identité du parallélogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

pour tous vecteurs $x, y \in E$. Faire un dessin.

Exercice 5

La matrice de Hilbert $H = (h_{j,k})_{1 \le j,k \le n}$ est donnée par

$$h_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}, \quad 1 \le j,k \le n.$$

Montrer que la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est H est symétrique et définie positive. On pourra utiliser la formule

$$h_{j,k} = \int_0^1 t^{j+k}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6

Soit $E = \mathbf{R}^3$ et soit b la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de B, puis les valeurs propres.
2. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, la diagonaliser.
3. La forme bilinéaire b est-elle définie positive ?

Exercice 7

Soit $E = \mathbf{R}^{n+1}$, on note $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ les vecteurs de E et on considère

$$b(x, y) = x_0 y_0 - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire sur E. Quelle est la forme quadratique associée ? Écrire la matrice de b dans la base canonique.
2. La forme bilinéaire b est-elle symétrique ? positive ? définie ?
3. Montrer l'inégalité d'Aczel
$$b(x, y)^2 \geq q(x)q(y)$$
pour tous $x, y \in E$ tels que $q(x) \geq 0$ et $q(y) \geq 0$. Pour simplifier les notations, introduire $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y' = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. On pourra calculer la différence $b(x, y)^2 - q(x)q(y)$, faire apparaître
$$(x_0\|y'\| - y_0\|x'\|)^2 \geq 0$$
puis utiliser Cauchy-Schwarz.