Feuille TD 05 - Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Les basiques
Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) - 2y(x) = 0\,;$
b) $y'(x) - 2y(x) = 2\,;$
c) $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0\,;$
d) $y'(x) + \sin(x)y(x) = 0\,;$
e) $y'(x) - 3y(x) = 2\,;$
f) $y'(x) + 2y(x) = e^{2x}\,;$
g) $y'(x) - 5y(x) = e^{5x}\,;$
h) $y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x}\,;$
i) $y'(x) - y(x) = \sin(x)\,;$
j) $y'(x) + 3x^2y(x) = x^2\,;$
k) $y'(x) - \ln(x)y(x) = e^{x\ln(x)-x}$.

Exercice 2. Donner une équation différentielle ayant la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$ pour solution.

Exercice 3. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

a) $(1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = 0\,;$
b) $(1+x^2)y'(x) + xy(x) = 0\,;$
c) $(1+x^2)y'(x) - xy(x) = 0\,;$
d) $(1+x^2)y'(x) + 3xy(x) = 0.$

Exercice 4. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

a) $(1+x^2)y'(x) + xy(x) = \sqrt{1+x^2}\,;$
b) $y'(x) + \frac{1}{3x}y(x) = x^{-\frac{1}{3}}\cos(x)\,;$
c) $y'(x) - \frac{y(x)}{2x} = x^{\frac{3}{2}}e^x\,;$
d) $(1+x^2)y'(x) - xy(x) = x.$

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de résolution :

a) $\cos(x)y'(x) - \sin(x)y(x) + \cos(x) = 0\,;$
b) $y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin(x)\,;$
c) $x^3y'(x) + 4(1-x^2)y(x) = 0\,;$
d) $|1-x|y'(x) + xy(x) = x\,;$
e) $y'(x) + \tan(x)y(x) = \cos(x)\,;$
f) $\tan(x)y'(x) + y(x) - \sin(x) = 0.$

Exercice 6. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x} + x\,; \quad y(0) = 1\,;$
b) $y'(x) + \frac{\cos^2(x)}{1+x^2}e^x y(x) = 0\,; \quad y(1) = 0.$

Exercice 7. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1-x^2)y'(x) - 2xy(x) = 1$$

1. Résoudre sur $]-1,+1[$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution qui pour $x = 0$ prend la valeur 1.
3. Résoudre (E) sur $]-\infty,-1[$.