Feuille TD 02 - Fonctions usuelles - I

Calculs de limites

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1}-3x$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)-\ln(x-1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln\left(x+\sqrt{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^x}{x^4+1}$

Domaines de définition

Exercice 3. Déterminer les domaines de définition et l'image des fonctions d'une variable réelle x définies par les expressions suivantes :

a) $\dfrac{2+3\,x}{5-2\,x}$

b) $\dfrac{x^2-2x-5}{x-1}$

c) $\dfrac{4x+3}{2x+1}$

d) $1+\ln(x)$

En déduire le domaine de définition des fonctions définies par les expression suivantes :

e) $\sqrt{\dfrac{2+3\,x}{5-2\,x}}$

f) $\sqrt{\dfrac{x^2-2x-5}{x-1}}$

g) $\ln\left(\dfrac{4x+3}{2x+1}\right)$

h) $\sqrt{1+\ln(x)}$

Exercice 4. Déterminer le domaine de définition des expressions d'un réel x suivantes :

a) $\dfrac{x}{4+x}$

b) $\cos\left(\dfrac{x^2}{x+4}\right)$

c) $\sqrt{x^2-4}$

d) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

e) $\ln(\cos(x)+2)$

f) $\sqrt{\sin(x)+1}$

g) $\sqrt{\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}}$

h) $\ln(x^2+3x+1)$

i) $\ln\sqrt{x}$

j) $\sqrt{\ln x}$

k) $\ln(e^x-2)$

l) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$

m) $\sqrt{\ln(x-3)}$

n) $\sqrt{e^x-4}$

Calculs de dérivées

Exercice 5. Domaine de définition, de dérivabilité, et dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x)=\cos(\cos(x))$

b) $f(x)=\cos(\sin(x))$

c) $f(x)=\cos(e^x)$

d) $f(x)=e^{e^x}$

e) $f(x)=\cos(2x^2+3x+5)$

f) $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

g) $f(x)=e^{\frac{1}{3x^2+2}}$

h) $f(x)=e^{\cos(x)}$

i) $f(x)=\ln(\ln(x))$

j) $f(x)=\sqrt{1+\ln(x)}$

k) $f(x)=\cos(x^2+2x)$

l) $f(x)=\dfrac{\cos(x^2)}{\cos(x)}$

m) $f(x)=\cos(\ln(x))$

n) $f(x)=\ln(\cos(x))$

o) $f(x)=\sin(x)\ln(2x+3)+\cos(x^2+1)e^x$

p) $f(x)=e^{\cos(\ln(x))}$

q) $f(x)=\cos(\cos(\cos(x)))$

Équations

Exercice 6. Domaine de définition dans $\mathbb{R}$ et résolution des équations et inéquations suivantes :

a) $e^{5x-3} = 1$

b) $e^{5x-3} = e^{2x^2}$

c) $e^{x-1}e^{x-2} - e^{x-3}e^{x-4} = 0$

d) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

e) $(e^{5x+1} - 1)(e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1) = 0$

f) $\ln(2x-3) = \ln(2)$

g) $\ln(2x-3) = -2$

h) $\ln(x) = \ln(x+5) - \ln(2)$

i) $\ln(x) = \ln(x+5) + \ln(2)$

j) $\ln(2x+1) + \ln(x-2) = \ln(x)$

k) $\ln(x) = \ln(5-x) + \ln(3)$

l) $\ln(x) = \ln(5-x) + \ln(6)$

m) $(\ln(x))^2 = 2$

n) $\sqrt{3x+1} \leq 2x$

o) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq \sqrt{2x+1}$

p) $\sqrt{3x-1} - \sqrt{2x+5} \leq 0$

q) $3x + 5 \leq \sqrt{x}$

r) $|4x-5| \leq 1$

s) $\left|\frac{x-3}{x+4}\right| < 3$

Exercice 7. Résoudre le système suivant sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur le domaine de définition maximal :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x/y = 2 \end{cases}$$

Études de fonctions

Exercice 8. Étudier la fonction f définie par

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$

Exercice 9 (Une demi hyperbole)**.** Étudier la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \sqrt{x^2+8}.$$

Exercice 10. Montrer :

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - \ln(x) \geq 1$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} - x \leq 1/4$;

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - 3x \geq 3 - 3\ln(3)$;

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{1-x^2} < 3$.

Exercice 11. Étudier la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|2x-1| - |x+2| + 3x.$$

Exercice 12. Établir, pour tout $x \geq 0$ l'encadrement

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Fonctions bijectives

Exercice 13. Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0;1]$.

Exercice 14. Montrer à l'aide d'une étude de fonction que l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Montrer que la fonction $f :]-1,0[\longrightarrow]0,1[$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 16. Montrer que la fonction $h : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ définie par

$$h(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

est bijective et déterminer sa fonction réciproque h^{-1}.