Feuille TD 01 - Limites et continuité

Limites

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + x - 6}{x^2 + 1}$, b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x + 2}$,

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 3x}{5 - 4x - 3x^2}$, d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$,

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$, f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$,

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$. h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2|x|}{x}$,

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2 + x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$,

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$.

Exercice 3. Soient m, n deux entiers positifs. Étudier la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ en fonction de m et n.

Exercice 4. Écrire, à l'aide de quantificateurs, l'affirmation suivante : f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire. On suppose que f admet ℓ pour limite en $+\infty$. Démontrer, à l'aide de la définition de limite, que f admet pour limite ℓ en $-\infty$.

Continuité

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme il suit

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2, \ \forall x \leq 1 \\ a \sin(\frac{\pi}{2}x), \ \forall x > 1 \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante réelle. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle continue ?

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus -1$ par $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$. Démontrer qu'on peut prolonger f par continuité en -1. Préciser la valeur prise en -1 par ce prolongement.

Exercice 8. Démontrer, à l'aide de la définition, que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en un point x_0, alors $|f|$ est continue en x_0. Démontrer à l'aide d'un exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 9. Soit $x \mapsto [x]$ la fonction partie entière et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto [x] - (x - [x])^2$. La fonction f est-elle continue ?

Exercice 10. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Démontrer qu'il existe à tout moment deux points opposés sur l'équateur où les températures sont égales. On pourra considérer que la température à l'équateur est une fonction continue de la longitude.

Exercice 12. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet toujours au moins un point fixe.