

Feuille TD 00 - Échauffement

Un peu de calculs algébriques

Exercice 1. Simplifier au mieux les expressions suivantes :

- | | |
|--|---|
| a) $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$,
c) $C = \frac{1}{24} - \frac{1}{16}$,
e) $E = \frac{(2^5)^3 \times 15^2}{10^2}$,
g) $G = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{12} \times \frac{9}{8}}{2 - \frac{4}{3}}$,
i) $I = (a^{2p})^2 + (a^{2p})^2$,
k) $K = 4\sqrt{75} - 5\sqrt{300} + 2\sqrt{48}$,
m) $M = \frac{(3\sqrt{2})^2}{\sqrt{9} \times 10^2}$. | b) $B = \frac{3}{21} - \frac{2}{6}$,
d) $D = \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{4} + \frac{12}{5}\right)$,
f) $F = \frac{10^{-5} \times (10^3)^7}{2^{-4} \times (2^5)^2}$,
h) $H = \frac{3^4}{2^5} + \left(\frac{6^2}{4^2}\right)^2$,
j) $J = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}}$,
l) $L = 2\sqrt{27} + 3\sqrt{48}$. |
|--|---|

Exercice 2. Développer et réduire les expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| a) $A = (2 + \sqrt{3})^2$,
c) $C = (a + b + c)^2$,
e) $E = (a + b)^3$, | b) $B = (\sqrt{14} - \sqrt{12})^2$,
d) $D = (a + 2b + c)^2 - (a - b)^2$,
f) $F = (a - 3b)^3$, |
|---|--|

Exercice 3. Réduire la fraction $\frac{84}{126}$. Écrire $\frac{1}{126} + \frac{1}{84}$ sous forme de fraction réduite.

Exercice 4. Écrire le réel $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}$ sans racine carrée au dénominateur.

Résolutions d'équations

Exercice 5. Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

- | | |
|---|---|
| a) $x^2 + x + 1 = 0$,
c) $x^2 + 3x + 5 = 0$,
e) $x^2 + 4x + 3 = 0$,
g) $2x^2 - 3x + 1 = 0$,
i) $x^2 - 5x + 6 = 0$, | b) $x^2 - x - 1 = 0$,
d) $x^2 + 4x + 4 = 0$,
f) $3x^2 + 6x - 3 = 0$,
h) $-4x^2 + 12x + 2 = 0$,
j) $2x^2 + 5x - 3 = 0$. |
|---|---|

Exercice 6. Déterminer les paramètres $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'équation d'inconnue x :

$$x^2 + x + a = 0$$

admet deux solutions réelles. Dans ce cas, résoudre l'équation.

Exercice 7. Trouver les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 44 m et d'aire 120 m².

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} ou sur le sous-ensemble adéquat de \mathbb{R} .

- | | |
|---|--|
| a) $(4x + 3)(5x + 7) = 0$
c) $(x + 5)^2 - (2x + 4)^2 = 0$
e) $\frac{8x+7}{8x-5} - \frac{2x+3}{2x} = 0$
g) $x^2 - (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$
i) $\frac{2x-3}{8x+5} = \frac{x-1}{2x+3}$
k) $x - 2\sqrt{x} + 5 = 0$
m) $ x - 5 = 2x + 1 $ | b) $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 8x + 9$
d) $\frac{1}{x-1} + \frac{8}{3x+1} = 0$
f) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 = 0$
h) $x^4 + 4x^2 = -4$
j) $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$
l) $ 3x - 5 = 0$
n) $ x^2 + 4x + 3 = 3$ |
|---|--|

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes sur le domaine de \mathbb{R} où elles ont un sens, graphiquement puis par le calcul :

a) $x + 3 = |x - 2|$

c) $(x + 1)^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

e) $|x^2 + 3x + 2| = x + 1$

g) $\sqrt{2x + 3} = x$

b) $|x + 3| = |x - 2|$

d) $x^2 + 3x + 2 = |x + 1|$

f) $x + 2 = \frac{1}{x-1}$

h) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x^2 - 1} = 0$

Résolutions d'inéquations

Exercice 10. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $x < y$. Que dire de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$?

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$. Montrer par des calculs élémentaires (c'est-à-dire sans étude de fonction) que :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1, \text{ et}$$

$$-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 3.$$

Exercice 12. Préciser le domaine de définition des inégalités suivantes et les résoudre sur ce domaine, c'est-à-dire déterminer leur ensemble de solutions : l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'inégalité (a un sens et) est vraie.

- | | |
|---|--------------------------------|
| a) $7x + 9 \leq 8x - 1$ | b) $\frac{1}{x-1} \geq 0$ |
| c) $4x^2 - 9 \geq 0$ | d) $\frac{3x-2}{4x+5} \leq 0$ |
| e) $2x(x-3) \leq x(2x-1)$ | f) $(2x+3)^2 - (x+1)^2 \leq 0$ |
| g) $4(x-1)^2 \leq (x+1)^2$ | h) $1 - 4x^2 \geq 0$ |
| i) $x^2 + x + \frac{1}{4} \leq (2x+1)^2$ | j) $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$ |
| k) $\frac{2x-5}{2x-4} \leq \frac{x-2}{x-3}$ | l) $\frac{2x+1}{x^2-1} \leq 0$ |
| m) $\sqrt{2x+3} \geq x$ | |

Exercice 13. Soient x et y deux réels. Déterminer le meilleur encadrement possible pour chaque expression ci-dessous, par des calculs élémentaires (sans faire d'étude de fonction) :

- | | |
|---|--|
| a) x^2 avec $1 \leq x \leq 2$; | b) x^2 avec $-1 \leq x \leq 2$; |
| c) $\frac{1}{1+x^2}$ avec $-1 \leq x \leq 2$; | d) $\frac{1}{1-x^2}$ avec $-1 < x < \frac{1}{2}$; |
| e) $x + y$ avec $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 3 \end{cases}$; | f) xy avec $x, y \in [\sqrt{2}; 2]$; |

- | | |
|---|---|
| g) xy avec $x, y \in [-1; 1]$; | h) $ x - y $ avec $x, y \in [-1; 1]$; |
| i) x/y avec $(x, y) \in [1; 2] \times [2; 3]$; | j) x/y avec $(x, y) \in [1; 2] \times [-3; -2]$; |
| k) x/y avec $(x, y) \in [-2; 3] \times [2; 3]$; | l) $\frac{1}{x+y}$ avec $(x, y) \in [1; 2] \times [2; 3]$; |
| m) $\frac{1}{y-x}$ avec $(x, y) \in]1; 2[\times]2; 3[$; | n) $\frac{x-y}{x+y}$ avec $(x, y) \in]1; 2[\times]2; 3[$; |
| o) $\frac{x+y}{x-y}$ avec $(x, y) \in]1; 2[\times]2; 3[$; | p) $(x - y)^2$ avec $(x, y) \in]1; 2[\times]2; 3[$; |
| q) $(x - y)^2$ avec $x, y \in [-1; 1]$. | |

Exercice 14. Montrer que pour tout couple de réels a et b , on a les inégalités

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad 4ab \leq (a + b)^2,$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $a = b$.

Exercice 15. Montrer que pour tout réel x positif non nul, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, et qu'il y a égalité si et seulement $x = 1$.

Résolutions de "petits" systèmes linéaires

Exercice 16. Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnues réelles :

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ 7x + 14y = -21 \end{cases}$ |
| d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ |
| g) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ | | |

Exercice 17. La somme de deux nombres x et y est 29. La différence de leurs carrés est 145. Quels sont ces nombres ?