

MATHÉMATIQUES POUR TOUS
SPI

DIPLOME : Licence SPI UE : Mathématiques pour tous Semestre : 1 Session : 1 Date : 13 octobre 2023 Horaire : 14h00–16h00 Nombre de pages : 2	Durée de l'examen : 2 heures Nom des rédacteurs : David Dos Santos Ferreira Nathan Toumi <input type="checkbox"/> Documents autorisés : <input checked="" type="checkbox"/> Documents non autorisés <input type="checkbox"/> Calculatrices autorisées <input checked="" type="checkbox"/> Calculatrices non autorisées
--	--

Exercice 1. Simplifier au mieux les expressions suivantes

(a) $A = \frac{15^2 \times 30}{27 \times 5^{-2}}$

(b) $B = 6\sqrt{75} - 2\sqrt{300} + 7\sqrt{48}$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes

(a) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}} dx$

(b) $\int_1^2 \frac{1}{x^6} dx$

(c) $\int_0^1 (x+2)^2 - x dx.$

Exercice 3. Calculer en utilisant une intégration par parties les primitives de

(a) $x^3 e^{-x^2}$

(b) $\ln x$

(c) $x \ln(x).$

Exercice 4. Calculer les limites suivantes

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2}.$

Exercice 5. Résoudre sur \mathbf{R} les inéquations suivantes :

(a) $x^2 - 6x + 8 \geq 0$

(b) $|x - 2| - 1 \geq 0.$

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer la minoration

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

pour tous les réels $x \geq 0$.

1. On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Donner son domaine de définition D_f puis son domaine de dérivabilité.

2. Calculer la dérivée de f .

3. Dresser le tableau de variation de f .

4. Esquisser le graphe de f .

5. Conclure. Que peut-on dire lorsque $x \in]-1, 0]$?

Exercice 7. On considère la fonction donnée par

$$g(x) = xe^{\frac{1}{\ln x}}.$$

1. Donner le domaine de définition D_g de g .

2. On impose $g(0) = 0$. Calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x}.$$

Que peut-on en déduire sur g en $x = 0$?

3. Résoudre l'équation $(\ln x)^2 = 1$.

4. Calculer la dérivée de g .

5. Dresser le tableau de variation de g .

6. Esquisser le graphe de g .